Ομάδες Πινάκων και Τοπολογία

Ζώης Μπουκουβάλας
zois@student.math.upatras.gr

Περιεχόμενα

Περίληψη

Η ανάγκη για επίλυση προβλημάτων σε αρκετά θέματα μαθηματικών αλλά και σε ζητήματα φυσικής μας οδηγεί πολλές φορές στο να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία των ομάδων πινάκων. Οι ομάδες πινάκων αποτελούν ταυτόχρονα ένα αλγεβρικό και γεωμετρικό αντικείμενο, που μας βοηθάει στο να δημιουργήσουμε μια γέφυρα μεταξύ της άλγεβρας και της γεωμετρίας. Επιπλέον, αποτελούν ειδικά αλλά πολύ σημαντικά παραδείγματα ομάδων Lie σε πολλές σύγχρονες περιοχές των μαθηματικών και της φυσικής. Σκοπός αυτής της εργασίας είναι να προσφέρουμε στον αναγνώστη μια πρώτη ιδέα για την δομή των ομάδων πινάκων ώστε να του δοθεί η δυνατότητα να κατανοήσει την πρακτική εφαρμογή αυτών. Για αυτό το λόγο κατα τη διάρκεια της εργασίας παραλείπονται αρκετές αποδείξεις με τεχνικό χαρακτήρα και παρουσιάζονται εφαρμογές και παραδείγματα.

Στο πρώτο κεφάλαιο εισαγάγουμε βασικές έννοιες της άλγεβρας, όπως την έννοια της ομάδας και των κβατερνίων καθώς και κάποια χρήσιμα εργαλεία της γραμμικής άλγεβρας, όπως πράξεις μεταξύ πινάκων και γραμμικούς μετασχηματισμούς. Τέλος, ορίζουμε την γενική γραμμική ομάδα, η οποία θα αποτελέσει την βάση για τη συνέχεια της εργασίας μας.

Στο δεύτερο κεφάλαιο θα μιλήσουμε γενικά για τις υποομάδες των γενικών γραμμικών ομάδων. Θα αποδείξουμε οτι κάθε υποομάδα της $GL_n(\mathbb{C})$ ή της $GL_n(\mathbb{H})$ είναι ισόμορφη με κάποια υποομάδα της $GL_m(\mathbb{R})$. Επίσης, θα παρουσιάσουμε κάποιες σημαντικές εφαρμογές, όπως την κατασκευή της S^1 και της S^3 καθώς και της ορίζουσας κβατέρνιου πίνακα.

Στο τρίτο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις πιο σημαντικες υποομάδες της γενικής γραμμικής ομάδας. Επιπλέον, θα ορίσουμε την ομάδα ισομετριών καθώς και μια πολύ σημαντική εφαρμογή για το πώς μπορεί μια ισομετρία να παρασταθεί σαν πίνακας. Χρησιμοποιώντας αυτή την εφαρμογή οι προγραμματιστές γραφικών, επιτυγχάνουν την περιστροφή και τη μεταφορά αντικειμένων στην οθόνη του υπολογιστή μέσω πινάκων.

Στο τελευταίο κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις υποομάδες της γενικής γραμμικής ως γεωμετρικά αντικείμενα του ευκλείδειου χώρου. Θα ορίσουμε κάποιες θεμελιώδεις έννοιες της τοπολογίας και μέσα απο αυτές θα είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε διαισθητικά την μορφή κάποιων ομάδων πινάκων, όπως για παράδειγμα την $Sp(1)$ που θα την ταυτίσουμε με την 3-διάστατη σφαίρα S^3.

Η εργασία αυτή έγινε στα πλαίσια προπτυχιακής διπλωματικής εργασίας υπό την επίβλεψη του Λέκτορα Ανδρέα Αρβανιτογεώργου, τον οποίο και ευχαριστώ θερμά για τις συζητήσεις που είχαμε για το θέμα, εντός και εκτός του

Πανεπιστημίου.

Ζώης Μπουκουβάλας
Αύγουστος 2007

Κεφάλαιο 1

Πίνακες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ξεκινήσουμε εισαγάγοντας την έννοια μιας ομάδας και θα μιλήσουμε για αντιμεταθετικά και μη σώματα. Στη συνέχεια θα αναφερθούμε σε απλές ιδιότητες πινάκων και στη γενική γραμμική ομάδα.

1.1 Ομάδες

Ορισμός 1.1.1. *Ομάδα είναι ένα μη κενό σύνολο G, εφοδιασμένο με μια διμελή πράξη $*$ στο G τέτοια ώστε, να ικανοποιούνται τα ακόλουθα αξιώματα:*

(1) Η $*$ είναι προσεταιριστική.

(2) Υπάρχει ένα στοιχείο e στο G τέτοιο, ώστε να ισχύει η σχέση

$$e * x = x * e = x$$

για κάθε $x \in G$, όπου το e λέγεται ουδέτερο στοιχείο της G.

(3) Για κάθε a στο G, υπάρχει ένα στοιχείο a' στο G με την ιδιότητα

$$a' * a = a * a' = e$$

όπου το στοιχείο a' λέγεται αντίστροφο του a.

Ορισμός 1.1.2. *Μια ομάδα G καλείται αβελιανή αν η διμελής της πράξη είναι αντιμεταθετική, δηλαδή $a * b = b * a$ για κάθε $a, b \in G$.*

Πόρισμα 1.1.1. *Σε μια ομάδα G με πράξη την $*$ το ουδέτερο στοιχείο e και το αντίστροφο στοιχείο a', όπου a' το συμβολίζουμε με a^{-1}, είναι μοναδικά.*

Παράδειγμα 1.1.1. Το σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ όλων των 2×2 πινάκων με πράξη την πρόσθεση είναι ομάδα. Ο πίνακας που έχει όλες του τις συντεταγμένες ίσες με 0 είναι το ταυτοτικό στοιχείο. Επιπλέον η ομάδα αυτη είναι αβελιανή.

Παράδειγμα 1.1.2. Το σύνολο $M_2(\mathbb{R})$ όλων των 2×2 πινάκων με πράξη των πολλαπλασιασμό πινάκων δεν είναι ομάδα. Ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

δεν έχει αντίστροφο.

Κλείνοντας αυτή την παράγραφο πολύ χρήσιμο για την συνέχεια θα είναι η έννοια της υποομάδας. Πρίν όμως δοθεί ο ορισμός και ένα χρήσιμο θεώρημα για τις υποομάδες, θα πρέπει να δώσουμε έναν βοηθητικό ορισμό.

Ορισμός 1.1.3. *Έστω $(G, *)$ μια ομάδα και S ένα υποσύνολο της G. Άν για κάθε $a, b \in S$ ισχύει $a * b \in S$, τότε λέμε πως το S είναι κλειστό ώς προς την πράξη ομάδας της G.*

Ορισμός 1.1.4. *Έστω H ένα μη κενό υποσύνολο μιας ομάδας $(G, *)$. Το H θα καλείται υποομάδα της G αν*

(1) Το H είναι κλειστό ως προς τη διμελή πράξη της G.

(2) Το H είναι ομάδα με την ίδια πράξη.

Θεώρημα 1.1.1. *Ένα υποσύνολο H μιας ομάδας G είναι υποομάδα της G αν και μόνο αν*

(1) Το H είναι κλειστό ως προς την διμελή πράξη της G,

(2) Το ουδέτερο στοιχείο e της G ανήκει στο H,

(3) Για κάθε $a \in H$ ισχύει $a^{-1} \in H$.

Απόδειξη. Επειδή η H είναι υποομάδα της G τότε οι συνθήκες $(1), (2), (3)$ ισχύουν απο τον ορισμό της υποομάδας. Αντιστρόφως, ας υποθέσουμε οτι H είναι ένα υποσύνολο της ομάδας G τέτοιο ώστε να ισχύουν οι συνθήκες $(1), (2), (3)$. Απο τη συνθήκη (2) έχουμε ότι υπάρχει το ταυτοτικό στοιχείο της H. Επίσης απο την (3) έχουμε οτι για κάθε στοιχείο της H υπάρχει το αντίστροφο του. Τέλος μένει να ελέγξουμε τη προσεταιριστικότητα της διμελούς πράξης. Όμως είναι σαφές πως για κάθε $a, b, c \in H$ ισχύει $(ab)c = a(bc)$ στην H, διότι στην πραγματικότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε αυτή την ισότητα ως ισότητα στην G, στην οποία ο προσεταιριστικός νόμος ισχύει. Επομένως H υποομάδα της G. □

Αφού λοιπόν κάναμε μια περιγραφή τών ομάδων και κάποιων απλών ιδιοτήτων τούς είμαστε έτοιμοι να συνεχίσουμε στην επόμενη παράγραφο όπου θα παρουσιάσουμε, αντιμεταθετικά και μη σώματα.

1.2 Αντιμεταθετικά και μη Αντιμεταθετικά σώματα

Ορισμός 1.2.1. *Ένα σώμα $\mathbb{K}$, είναι ένα μη κενό σύνολο, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού τέτοιο ώστε να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$.

(2) Το σύνολο $(\mathbb{K}, +)$ *είναι αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το* 0.

(3) Το σύνολο $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ *είναι αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το* 1.

Κάποια σώματα που μας είναι οικεία και τα χρησιμοποιούμε συνεχώς, είναι τα $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ και το $\mathbb{C}$. Μία άλλη αλγεβρική δομή όμως, που ίσως να μήν μας είναι και τόσο γνωστή αλλά θα μας απασχολήσει πάρα πολύ στην συνέχεια είναι το μη αντιμεταθετικό σώμα (skew-field).

Ορισμός 1.2.2. *Ένα μη αντιμεταθετικό σώμα $\mathbb{K}$, είναι ένα μη κενό σύνολο, εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού τέτοιο ώστε να ισχύουν οι εξής ιδιότητες:*

(1) $a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ *και* $(b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$.

(2) Το σύνολο $(\mathbb{K}, +)$ *είναι αβελιανή ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το* 0.

(3) Το σύνολο $(\mathbb{K} - \{0\}, \cdot)$ *είναι ομάδα, με ουδέτερο στοιχείο το* 1.

Η διαφορά του λοιπόν από απο ένα σώμα είναι πως δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα ως προς τον πολλαπλασιασμό.

Οι πραγματικοί αριθμοί και οι μιγαδικοί, όπως αναφέραμε και πρίν είναι σώματα. Το σώμα των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ ορίζεται ως το σύνολο εκείνο του οποίου τα στοιχεία είναι όλα τα διατεταγμένη ζεύγη (a, b), όπου a και b πραγματικοί αριθμοί και όπου η πρόσθεση και ο πολλαπλασιασμός μεταξύ των ζευγών αυτών ορίζεται αντιστοίχως ως εξής:

$$\begin{aligned} (a,b)+(c,d) &= (a+c, b+d) \\ (a,b)(c,d) &= (ac-bd, bc+ad). \end{aligned}$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός $z = a + ib \in \mathbb{C}$ μπορεί να ταυτιστεί με το σημείο (a, b) του ευκλείδειου επιπέδου $\mathbb{R}^2$. Μέσω της ταύτισης αυτής το $\mathbb{R}^2$ είναι ισόμορφο με το $\mathbb{C}$. Γεννιέται τώρα το ερώτημα αν μπορεί το $\mathbb{R}^3$ να αποκτήσει δομή σώματος.

Θεώρημα 1.2.1. *Δεν είναι δυνατόν να επεκταθούν οι πράξεις* $+, \cdot$ *του* $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$ *στο* $\mathbb{R}^3$ *ώστε αυτό να αποκτήσει δομή σώματος.*

Απόδειξη. Έστω $\{1, i, j\}$ μία βάση του $\mathbb{R}^3$. Τότε κάθε στοιχείο του $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφεί μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης. Συνεπώς αν έχουμε ότι $ij = a + bi + cj$ γιά κάποια $a, b, c \in \mathbb{R}$ τότε θα έχουμε $i(ij) = ai + bi^2 + cij$ οπότε

$$\begin{aligned} -j &= ai - b + cij \\ -j &= ai - b + (a + ib + cj)c \\ -j &= (ac - b) + (a + bc)i + c^2 j, \end{aligned}$$

που σημαίνει ότι $c^2 = -1$. Αλλά αυτό αντιφάσκει με το γεγονός ότι $c \in \mathbb{R}$. $\square$

1.3 Κβατέρνια

Αφού αποδείξαμε πως το $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ δέν είναι σώμα, ερχόμαστε τώρα στο σημείο να αναρωτηθούμε για το αν μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\mathbb{R}^n$ με δομή σώματος για $n \geq 3$. Ο Hamilton το 1843 έδωσε λύση σε αυτό το δύσκολο ερώτημα της εποχής αποδεικνύοντας πως το $\mathbb{R}^n$ για $n = 4$ επιδέχεται δομή σώματος και μάλιστα μη αντιμεταθετικού.

Για να περιγράψουμε αυτή τη διαδικασία θα πάρουμε ένα στοιχείο $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ και θα το συμβολίσουμε ως $a + bi + cj + dk$. Εισάγουμε έναν πολλαπλασιαστικό κανόνα στα σύμβολα $\{1, i, j, k\}$ ως εξής:

$$i1 = 1i = i, \qquad j1 = 1j = j, \qquad k1 = 1k = k.$$

Για τα άλλα τρία σύμβολα έχουμε:

$$i^2 = -1, \qquad j^2 = -1, \qquad k^2 = -1.$$

Τέλος, το γινόμενο των δύο εκ των τριών συμβόλων θα μας δίνει το τρίτο, κυκλικά:

$$\begin{array}{ccc} ij = k, & jk = i, & ki = j, \\ ji = -k, & kj = -i, & ik = -j. \end{array}$$

Το γινόμενο δύο αυθαίρετων στοιχείων έχει την ακόλουθη μορφή:

$$(a+bi+cj+dk)(x+yi+zj+wk) = (ax-by-cz-dw)+(ay+bx+cw-dz)i$$

$$+(az + cx + dy - bw)j + (aw + dx + bz - cy)k.$$

Το σύνολο $\mathbb{R}^4$, εφοδιασμένο με τη πράξη της πρόσθεσης των συνιστωσών και τη πράξη του πολλαπλασιασμού, με τον τρόπο που περιγράφτηκε παραπάνω, θα συμβολίζεται με $\mathbb{H}$ και θα καλείται **σώμα των κβατερνίων**. Το σύνολο των κβατερνίων αποτελεί μια θεμελιώδη έννοια για τα μαθηματικά και την φυσική και όπως θα δούμε και στα επόμενα κεφάλαια είναι τόσο σημαντικό όσο και το σύνολο των πραγματικών ή των μιγαδικών αριθμών.

Για να αποδείξουμε ότι το $\mathbb{H}$ είναι ένα μη αντιμεταθετικό σώμα το μόνο δύσκολο σημείο που θα αντιμετωπίσουμε είναι ότι κάθε μη μηδενικό στοιχείο έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Για αυτό το λόγο, είναι χρήσιμο να ορίσουμε τον συζυγή και το μέτρο ενός αυθαίρετου στοιχείου $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ ως εξής:

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk$$
$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Ισχύει ότι $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$ και οτι $\frac{\overline{q}}{|q|^2}$ είναι πολλαπλασιαστικός αντίστροφος του q.

Αξίζει να σημειώσουμε ότι επειδή $a = a + 0i$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $a + bi = a + bi + 0j + 0k$ για κάθε $a + bi \in \mathbb{C}$ ισχύει ότι:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{H}.$$

Κάθε μιγαδικός αριθμός μπορεί να γραφτεί σαν $z = a + bi$ για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Όμοια κάθε κβατέρνιο μπορεί να γραφτεί σαν $q = z + wj$ για κάποια $z, w \in \mathbb{C}$.

$$a + bi + cj + dk = (a + bi) + (c + di)j.$$

Μετά απο τα παραπάνω γεννάται το ερώτημα του κατα πόσον μπορούμε να εφοδιάσουμε το $\mathbb{R}^n$ με δομή σώματος. Θα μπορούσαμε ακόμη να θεωρήσουμε το $\mathbb{R}^4$ ως σώμα και όχι μη αντιμεταθετικό σώμα· Η απάντηση σε όλα αυτά τα ερωτήματα είναι **οχι**. Ο Arthur Cayley απέδειξε το 1845 πως εκτός απο το σύνολο των κβατερνίων υπάρχει και ένα άλλο σύστημα αριθμών το οποίο καλείται οκτάνια, ορίζοντας ένα πολλαπλασιαστικό κανόνα για το $\mathbb{R}^8$.

1.4 Πράξεις μεταξύ πινάκων

Σε αυτή την παράγραφο θα αναφερθούμε σε συμβολισμούς, ιδιότητες και αλγεβρικές πράξεις που ορίζονται πάνω στους πίνακες.

Έστω $M_{m,n}(\mathbb{K})$ το σύνολο όλων των $m \times n$ πινάκων όπου με m θα συμβολίζουμε τις γραμμές και με n τις στήλες, όπου τα στοιχεία των στηλών και των γραμμών θα ανήκουν στο σώμα $\mathbb{K}$. Το σύνολο $M_{n,n}(\mathbb{K})$ θα το συμβολίζουμε με $M_n(\mathbb{K})$ και είναι το σύνολο όλων των τετραγωνικών $n \times n$ πινάκων. Αν $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, τότε το A_{ij} είναι το στοιχείο της i γραμμής και της j στήλης του πίνακα A.

Έστω A και B δύο πίνακες με το ίδιο μέγεθος, έστω $m \times n$. Το άθροισμα των A και B, γράφεται $A+B$ και είναι ο πίνακας που λαμβάνεται προσθέτοντας τα αντίστοιχα στοιχεία των A και B. Δηλαδή,

$$(A+B)_{i,j} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Το γινόμενο του πίνακα A με έναν αριθμό $k \in \mathbb{K}$, που γράφεται kA είναι ο πίνακας που λαμβάνεται πολλαπλασιάζοντας το κάθε στοιχείο του A με το k. Τέλος, το γινόμενο δύο πινάκων $A_{m,n}$ και $B_{n,l}$ είναι το στοιχείο $AB \in M_{m,l}(\mathbb{K})$, και ορίζεται ως εξής:

$$(AB)_{ij} = (i \text{ γραμμή του A}) \cdot (j \text{ στήλη του B}) = \sum_{s=1}^{n} A_{is} \cdot B_{sj}.$$

Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$. Η κύρια διαγώνιος ή απλά διαγώνιος του A, αποτελείται απο τα στοιχεία με τους ίδιους δείκτες, δηλαδή τα $A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn}$. Για παράδειγμα:

$$\text{diag}(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ο ταυτοτικός πίνακας, ο οποίος συμβολίζεται με I είναι ο $n \times n$ πίνακας με στοιχεία 1 στην διαγώνιο και μηδενικά στις άλλες θέσεις. Γράφεται και ως εξής:

$$I = \text{diag}(1, ..., 1).$$

Ο ανάστροφος ενός πίνακα A, συμβολίζεται με A^T, και είναι ο πίνακας που λαμβάνεται γράφοντας τις γραμμές του A ως στήλες και τις στήλες σαν γραμμές. Με άλλα λόγια, εάν ο A είναι ένας $m \times n$ πίνακας, τότε ο A^T είναι ένας $n \times m$ πίνακας. Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει τις βασικές ιδιότητες του ανάστροφου πίνακα.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω A και B δύο πίνακες και έστω $k \in \mathbb{K}$ ένας αριθμός. Τότε όταν ορίζεται άθροισμα και το γινόμενο, ισχύουν τα εξής:*

(1) $(A+B)^T = A^T + B^T$,

(2) $(A^T)^T = A$,

(3) $(kA)^T = kA^T$,

(4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Έστω τώρα ένας τετραγωνικός πίνακας. Η κύρια διαγώνιος του A, αποτελείται από τα στοιχεία με τους ίδιους δείκτες, δηλαδή τα

$$A_{11}, A_{22}, A_{33}, ..., A_{nn}$$

Το ίχνος του A, που γράφεται $\mathrm{tr}(A)$, είναι το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων. Συγκεκριμένα

$$\mathrm{tr}(A) = A_{11} + A_{22} + A33 + ... + A_{nn}.$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω A και B τετραγωνικοί πίνακες, και $k \in \mathbb{K}$. Τότε*

(1) $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$,

(2) $\mathrm{tr}(kA) = k\mathrm{tr}(A)$,

(3) $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$,

(4) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι η (4) ισχύει μόνο όταν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Ο πολλαπλασιασμός στο $\mathbb{H}$ δεν είναι προσεταιριστικός και έτσι η (4) ισχύει μόνο στο $M_1(\mathbb{H})$.
Θα αναφερθούμε τώρα στην συνάρτηση ορίζουσας, όταν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.Η συνάρτηση ορίζουσας θα είναι της μορφής:

$$\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K},$$

Ισχύει το εξής:

Θεώρημα 1.4.3. *Η συνάρτηση ορίζουσας έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) Για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ ισχύει $\det(AB) = \det(A)\det(B)$,

(2) $\det I_n = 1$,

(3) Ο $A \in M_n(\mathbb{K})$ αντιστρέφεται αν και μόνο αν $\det(A) \neq 0$.

Η ορίζουσα είναι μια σημαντική έννοια της γραμμικής άλγεβρας αφού μας βοηθάει στο να λύνουμε γραμμικές εξισώσεις. Παρακάτω παρουσιάζουμε ένα παράδειγμα ορίζουσας ενός πίνακα 3×3:

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} =$$

$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)$$
$$= aei + bfg + cdh - (afh + bdi + ceg).$$

Σε παράδειγμα που θα ακολουθήσει σε επόμενη παράγραφο θα ορίσουμε την ορίζουσα ενός πίνακα με συντελεστές απο το σύνολο των κβατερνίων.

Έστω οτι $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Άν $a \in \mathbb{K}$ και $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, το αριστερό γινόμενο $a \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ είναι το γινόμενο των στοιχείων του A με το a.

$$(a \cdot A)_{ij} = a \cdot A_{ij}.$$

Αυτή η πράξη ονομάζεται αριστερός βαθμωτός πολλαπλασιασμός. Το $M_{m,n}$ θα είναι ένας αριστερός διανυσματικός χώρος επι του $\mathbb{K}$ ως προς την πρόσθεση πινάκων και τον αριστερό βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Ορισμός 1.4.1. *Ένας αριστερός διανυσματικός χώρος επί ενός μή αντιμεταθετικού σώματος $\mathbb{K}$ είναι ένα σύνολο M εφοδιασμένο με μια πράξη πρόσθεσης και βαθμωτού πολλαπλασιασμού.*

$$\begin{array}{cc} M \times M \to M & \mathbb{K} \times M \to M \\ (A, B) \mapsto A + B & (a, A) \mapsto a \cdot A. \end{array}$$

Το M είναι μία αβελιανή ομάδα με πράξη την πρόσθεση. Επιπλέον για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και για κάθε $A, B \in M$ ισχύει:

(1) $a \cdot (b \cdot A) = (a \cdot b) \cdot A$,

(2) $1 \cdot A = A$,

(3) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$,

(4) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$.

Εάν είχαμε επιλέξει να μιλήσουμε για τον δεξιό βαθμωτό πολλαπλασιασμό στο $M_{m,n}(\mathbb{K})$ θα ορίζαμε $(A \cdot a)_{i,j} = A_{i,j} \cdot a$, και έτσι το $M_{m,n}(\mathbb{K})$ θα ήταν ένας δεξιός διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{K}$. Σε αυτή την περίπτωση ένας δεξιός διανυσματιός χώρος θα συμβολίζεται ως $a, A \mapsto A \cdot a$. Οι υπόλοιπες ιδιότητες θα έχουν οι εξής:

(1) $A \cdot (a \cdot b) = (A \cdot a) \cdot b$,

(2) $A \cdot 1 = A$,

(3) $A \cdot (a + b) = A \cdot a + A \cdot b$,

(4) $(A + B) \cdot a = A \cdot a + B \cdot a$.

Ορισμός 1.4.2. *Ένα υποσύνολο W ενός αριστερού διανυματικού χώρου M επί ενός μή αντιμεταθετικού σώματος $\mathbb{K}$ καλείται υπόχωρος του M εάν για κάθε $a, b \in \mathbb{K}$ και για κάθε $A, B \in W$ ισχύει, $a \cdot A + b \cdot B \in W$.*

Αφού λοιπόν δώσαμε τους ορισμούς και έχουμε συνολική εποπτεία για το τι σημαίνει αριστερός και δεξιός διανυσματικός χώρος, αξίζει να παρατηρήσουμε πως αν το $\mathbb{K}$ είναι σώμα τότε απλά θα μιλάμε για διανυσματικούς χώρους. Άν όμως το $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ τότε απο δώ και στο εξής θα επιλέγουμε να μιλάμε για τον $M_{m,n}(\mathbb{H})$ ως αριστερό διανυσματικό χώρο επί του $\mathbb{H}$.

1.5 Πίνακες ως γραμμικοί μετασχηματισμοί

Ορισμός 1.5.1. *Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{K}^n$ το σύνολο όλων των διατεταγμένων στοιχείων του $\mathbb{K}$. Η πρόσθεση στον $\mathbb{K}^n$ ορίζεται ως εξής:*

$$\text{Αν } a = (a_1, ..., a_n),\ b = (b_1, ..., b_n) \text{ τότε } a + b = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n).$$

Αυτή η πράξη εφοδιάζει το $\mathbb{K}^n$ με δομή αβελιανής ομάδας, με ουδέτερο στοιχείο το $(0, ..., 0)$. Για $c \in \mathbb{K}$ ορίζουμε

$$ca = (ca_1, ..., ca_n)$$

και έτσι και με αυτή την πράξη ο $\mathbb{K}^n$ γίνεται διανυσματικός χώρος επί του $\mathbb{K}$.

Ορισμός 1.5.2. *Μία απεικόνιση $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ ονομάζεται γραμμική εάν για κάθε $c, d \in \mathbb{K}$ και $a, b \in \mathbb{K}^n$ ισχύει*

$$f(ca + db) = cf(a) + df(b).$$

Ορισμός 1.5.3. *Εάν οι $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ και $g : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ είναι γραμμικές τότε και η $g \circ f$ θα είναι γραμμική.*

Απόδειξη. $g \circ f(ca + db) = g(cf(a) + df(b)) = c(g \circ f)(a) + d(g \circ f)(b)$. □

Είναι φυσικό να ταυτίσουμε τον $\mathbb{K}^n = \{(q_1, .., q_n) \mid q_i \in \mathbb{K}\}$ με το $M_{1,n}(\mathbb{K})$ και έτσι να θεωρήσουμε τον $\mathbb{K}^n$ σαν αριστερό διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{K}$. Χρησιμοποιώντας αυτή την αντιστοιχία υπάρχουν δύο τρόποι με τους οποίους μπορούμε να αντιστοιχίσουμε κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{K})$ σε έναν γραμμικό μετασχηματισμό απο τον $\mathbb{K}^n$ στον $\mathbb{K}^n$.

Ορισμός 1.5.4. *Άν $A \in M_n(\mathbb{K})$ ορίζουμε την απεικόνιση $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ και την απεικόνιση $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ τέτοιες ώστε για κάθε $X \in \mathbb{K}^n$, να ισχύει:*

$$R_A(X) = X \cdot A \quad \textit{και} \quad L_A(X) = X \cdot A^T.$$

Για παράδειγμα, εάν $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, τότε για κάθε $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$R_A(x, y) = (x \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = (x + 3y, 2x + 4y), \text{ και}$$

$$L_A(x, y) = (x \;\; y) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = (x + 2y, 3x + 4y).$$

Στην συνέχεια θα αποδείξουμε πως ο δεξιός πολλαπλασισμός ορίζει μία $1-1$ αντιστοιχία μεταξύ γραμμικών συναρτήσεων απο τον $\mathbb{K}^n$ στον $\mathbb{K}^n$ και πινάκων.

Πρόταση 1.5.1.

(1) Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{K})$, η $R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ είναι γραμμική.

(2) Κάθε γραμμική απεικόνιση απο το $\mathbb{K}^n$ στο $\mathbb{K}^n$ αντιστοιχεί σε μια R_A για κάποιο $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε τη γραμμικότητα. Έστω $a, b \in \mathbb{K}$ και $X, Y \in \mathbb{K}^n$. Τότε

$$R_A(aX + bY) = (aX + bY) \cdot A = a(X \cdot A) + b(Y \cdot A) = a \cdot R_A(X) + b \cdot R_A(Y).$$

Για το (2) έστω $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ μία γραμμική απεικόνιση. Έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ ο πίνακας του οποίου οι γραμμές είναι τα $f(e_i)$, όπου

$$e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 1)$$

είναι η συνηθισμένη βάση του χώρου $\mathbb{K}^n$. Είναι προφανές οτι $f(e_i) = R_A(e_i)$ για κάθε $i = 1, .., n$. Επειδή οι f και R_A είναι γραμμικές απεικονίσεις και έχουν την ίδια τιμή σε μια βάση, συμπαιρένουμε οτι $f = R_A$. $\square$

Από την προηγούμενη πρόταση είδαμε ότι οι γραμμές ενός $A \in M_n(\mathbb{K})$ είναι οι εικόνες του $\{e_1, ..., e_n\}$ μέσω της R_A. Αντίστοιχα οι στήλες του είναι εικόνες μέσω της L_A. Η απεικόνιση $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ είναι γραμμική μόνο όταν $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ και αυτό γιατί το $\mathbb{H}^n$ μπορεί να εφοδιαστεί μόνο με δομή αριστερού διανυσματικού χώρου.

Πρόταση 1.5.2. *Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.*

(1) Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{K})$, η $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ είναι γραμμική.

(2) Κάθε γραμμική απεικόνιση απο το $\mathbb{K}^n$ στο $\mathbb{K}^n$ αντιστοιχεί σε μια L_A για κάποιο $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Η απόδειξη είναι όμοια με την προηγούμενη, και σημειώνουμε οτι

$$L_A = R_{A^T} \text{ για κάθε } A \in M_n(\mathbb{K}), \text{ όπου } \mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}.$$

1.6 Γενικές γραμμικές ομάδες

Το σύνολο $M_n(\mathbb{K})$ δεν είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό πινάκων, γιατί ορισμένοι πίνακες δεν έχουν πολλαπλασιαστικό αντίστροφο. Για παράδειγμα, εάν ένας $A \in M_n(\mathbb{K})$ έχει όλα τα στοιχεία του μηδέν, τότε δεν έχει πολλαπλασιαστικό αντίστροφο, δηλαδή δεν ισχύει $AB = BA = I$. Παρόλα αυτά τα στοιχεία ενός $M_n(\mathbb{K})$ τα οποία έχουν αντίστροφους σχηματίζουν μία πολύ σημαντική ομάδα της οποίας οι υποομάδες θα αποτελέσουν κύριο θέμα συζήτησης στη συνέχεια.

Ορισμός 1.6.1. *Η γενική γραμμική ομάδα επί του σώματος $\mathbb{K}$ είναι το σύνολο*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{υπάρχει } B \in M_n(\mathbb{K}) \text{ ώστε } AB = BA = I\}.$$

Πρόταση 1.6.1.

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid R_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n \text{ είναι γραμμικός ισομορφισμός}\}.$$

Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{K})$ η R_A είναι πάντα γραμμική. Θα καλείται ισομορφισμός του $\mathbb{K}^n$ επί του $\mathbb{K}^n$, εάν είναι αμφιμονοσήμαντη και επί του $\mathbb{K}^n$. Στην περίπτωση αυτή η $(R_A)^{-1}$ είναι ισομορφισμός του $\mathbb{K}^n$ επί του ευατού του.

Απόδειξη. Έστω πίνακας $A \in GL_n(\mathbb{K})$ και B τέτοιος ώστε $BA = I$. Τότε

$$R_A \circ R_B = R_{BA} = R_I = \mathrm{id} \text{ (ταυτοτική απεικόνιση)}.$$

Συνεπώς η αντίστροφη της R_A είναι η R_B.

Αντίστροφα, έστω $A \in M_n(\mathbb{K})$ τέτοιος ώστε η R_A να αντιστρέφεται. Η $(R_A)^{-1}$ είναι γραμμική. Πράγματι,

$$(R_A)^{-1}(aX + bY) = a(R_A)^{-1}(X) + b(R_A)^{-1}(Y).$$

Έτσι έχουμε ότι $(R_A)^{-1} = R_B$ για κάποιο $B \in M_n(\mathbb{K})$. Επομένως $R_{BA} = R_A \circ R_B = \mathrm{id}$, το οποίο σημαίνει ότι $BA = I$. Όμοια, $R_{AB} = R_B \circ R_A = \mathrm{id}$, που σημαίνει $AB = I$. □

Πόρισμα 1.6.1. *Έστω $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Τότε*

$$GL_n(\mathbb{K}) = \{A \in M_n(\mathbb{K}) \mid \det(A) \neq 0\}.$$

Αφού λοιπόν περιγράψαμε κάποια πολύ βασικά εργαλεία της γραμμικής άλγεβρας, είμαστε έτοιμοι να μπούμε στο βασικό κομμάτι της εργασίας, που είναι οι ομάδες πινάκων.

Κεφάλαιο 2

Όλες οι ομάδες πινάκων είναι πραγματικές ομάδες πινάκων

Στο κεφάλαιο αυτό θα αναφερθούμε σε υποομάδες των γενικών γραμμικών ομάδων. Θα αποδείξουμε οτι κάθε υποομάδα της $GL_n(\mathbb{C})$ ή της $GL_n(\mathbb{H})$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $GL_m(\mathbb{R})$ για κάποιο m. Άμεση συνέπεια αυτού αποτελεί το παρακάτ θεώρημα:

Θεώρημα 2.0.1.

(1) Η $GL_n(\mathbb{C})$ είναι ισόμορφη με μία υποομάδα της $GL_{2n}(\mathbb{R})$.

(2) Η $GL_n(\mathbb{H})$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $GL_{2n}(\mathbb{C})$.

Απο το παραπάνω θεώρημα συμπαιρένουμε οτι η $GL_n(\mathbb{H})$ είναι ισόμορφη με μια υποομάδα της $GL_{4n}(\mathbb{R})$.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια του κεφαλαίου το παραπάνω θεώρημα κατασκευάζοντας τους αμφιμονοσήμαντους ομομορφισμούς:

$$\rho_n : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R}) \text{ και } \psi_n : GL_n(\mathbb{H}) \to GL_{2n}(\mathbb{C})$$

2.1 Μιγαδικοί πίνακες ως πραγματικοί πίνακες

Θα ξεκινήσουμε την παράγραφο με ένα παράδειγμα. Έστω ο πίνακας $B = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Γνωρίζουμε απο το προηγούμενο κεφάλαιο πως για έναν τέτοιο πίνακα αντιστοιχεί μια γραμμική απεικόνιση $R_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$.

Η R_B παριστά στροφή γύρω απο γωνία ϑ. Πράγματι, έστω, ένα τυχαίο διάνυσμα (x, y) στο $\mathbb{R}^2$.

$$R_B(x, y) = (x \ \ y) \cdot \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = (x\mathrm{cos}\theta + \mathrm{ysin}\vartheta, \mathrm{ycos}\theta - \mathrm{xsin}\theta).$$

Τότε και με μετασχηματισμό σε πολικές συντεταγμένες $x = r\mathrm{cos}\phi, \mathrm{y} = \mathrm{rsin}\phi$ προκύπτει ότι

$$R_B(\mathrm{rcos}\phi, \mathrm{rsin}\phi) = (\mathrm{rcos}\phi \ \ \mathrm{rsin}\phi) \cdot \begin{pmatrix} \mathrm{cos}\vartheta & \mathrm{sin}\vartheta \\ -\mathrm{sin}\vartheta & \mathrm{cos}\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= (r\mathrm{cos}\phi\mathrm{cos}\vartheta + \mathrm{rsin}\phi\mathrm{sin}\vartheta, -\mathrm{rcos}\phi\mathrm{sin}\vartheta + \mathrm{sin}\phi\mathrm{cos}\vartheta) =$$

$$= (r\mathrm{cos}(\vartheta + \phi), \mathrm{rsin}(\vartheta + \phi)).$$

Συγκρίνοντας το παραπάνω με τον πίνακα $A = (e^{i\vartheta}) \in M_1(\mathbb{C})$, παρατηρούμε ότι η $R_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ παριστά επίσης στροφή γύρω απο γωνία ϑ:

$$e^{i\vartheta} = \mathrm{cos}\vartheta + \mathrm{isin}\vartheta$$

Άρα εργαζόμενοι όπως και για τον πίνακα B θα έχουμε:

$$R_A(re^{i\vartheta}) = re^{i(\vartheta+\phi)}.$$

Συνεπώς οι πίνακες A, B παρουσιάζουν την ίδια γεωμετρική κίνηση. Αφού λοιπόν παρουσιάσαμε τα δύο αυτά παραδείγματα θα προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε μια συνάρτηση της μορφής:

$$\rho_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$$

η οποία θα στέλνει κάθε πίνακα $A \in M_n(\mathbb{C})$ σε έναν άλλο $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Κάθε πίνακας $A \in M_n(\mathbb{C})$ αντιστοιχεί σε μια γραμμική απεικόνιση $R_A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Αυτή η απεικόνιση μπορεί να αντικατασταθεί απο μια άλλη $R_B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, αφού είναι γνωστό ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τον $\mathbb{R}^{2n}$ με τον $\mathbb{C}^n$ μέσω του ισομορφισμού, $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

$$f_n(a_1 + b_1 i, a_2 + b_2 i, ..., a_n + b_n i) = (a_1, b_1, a_2, b_2, ..., a_n, b_n).$$

Θα κατασκευάσουμε τώρα την απεικόνιση $\rho_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$, έτσι ώστε για κάθε $A \in M_n(\mathbb{C})$ το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{\rho_n(A)}"] \\ \mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}} \end{tikzcd}$$

Παρατηρώντας το παραπάνω διάγραμμα βλέπουμε οτι $R_{\rho_n(A)} \circ f_n = f_n \circ R_{\rho_n(A)}$. Τα ακόλουθα δύο παραδείγματα θα μας βοηθήσουν για την κατανόηση της ρ_n.

- Όταν $n = 1$ έχουμε την $\rho_1 : M_1(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{R})$

$$\rho_1(a+bi) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον, η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και σαν

$$\rho_1(a+ib) = aI_2 - bJ,$$

όπου $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ παριστά στροφή στο επίπεδο κατα γωνία $\frac{3\pi}{2}$.

- Όταν $n = 2$ έχουμε την $\rho_2 : M_2(\mathbb{C}) \to M_4(\mathbb{R})$.

$$\rho_2 \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ e+fi & h+ji \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ e & f & h & j \\ -f & e & -j & h \end{pmatrix}.$$

Απο τα παραπάνω παραδείγματα βλέπουμε οτι για έναν πίνακα $Z = z_{rs} \in M_n(\mathbb{C})$ με $z_{rs} = x_{rs} + iy_{rs}$ δηλαδή $Z = (x_{rs}) + i(y_{rs})$ είναι:

$$\rho_n(Z) = \begin{pmatrix} \rho(z_{11}) & \rho(z_{12}) & \cdots & \rho(z_{1n}) \\ \rho(z_{21}) & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \rho(z_{n1}) & \cdots & \cdots & \rho(z_{nn}) \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 2.1.1. *Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και για κάθε $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ ισχύει:*

(1) $\rho_n(kA) = k \cdot \rho_n(A)$.

(2) $\rho_n(A+B) = \rho_n(A) + \rho_n(B)$.

(3) $\rho_n(AB) = \rho_n(A) \cdot \rho_n(B)$.

Απόδειξη. Τα δύο πρώτα ισχύουν, άρα μένει να δείξουμε το τρίτο. Αρχικά θα θεωρήσουμε το αντιμεταθετικό διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{C}^{n} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{\rho n(A)}"] \\ \mathbb{C}^{n} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_B"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{\rho n(B)}"] \\ \mathbb{C}^{n} \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

Παίρνοντας την σύνθεση των δεξιών απεικονίσεων του διαγράμματος έ-χουμε:

$$R_{\rho_n}(B) \circ R_{\rho_n}(A) = R_{\rho_n}(B) \cdot R_{\rho_n}(A).$$

Επιπλέον, αν πάρουμε τις απεικονίσεις της αριστερής πλευράς του διαγράμματος θα έχουμε:

$$R_B \circ R_A = R_{AB} \text{ που γράφεται και σαν } R_{\rho_n(AB)}.$$

Επομένως,

$$R_{\rho_n(A)} \cdot R_{\rho_n(B)} = R_{\rho_n(AB)},$$

συνεπώς $\rho_n(AB) = \rho_n(A) \cdot \rho_n(B)$. □

Πρόταση 2.1.2. *Έστω $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση R_B θα είναι $\mathbb{C}-$ γραμμική αν και μόνο αν η $F = f_n^{-1} \circ R_B \circ f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ είναι $\mathbb{C}-$ γραμμική.*

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_B"] \\
\mathbb{C}^n & \mathbb{R}^{2n} \arrow[l, "f_n^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Απο το διάγραμμα φαίνεται οτι η F είναι $\mathbb{R}-$ γραμμική. Αυτή θα είναι και $\mathbb{C}-$ γραμμική αν και μόνο αν $F(iX) = iF(X)$ για κάθε $X \in \mathbb{C}^n$. Παίρνοντας, τώρα την ειδική περίπτωση όπου $A \in M_{2n}(\mathbb{C})$ η $\rho_n(A)$ θα ισούται με $J_{2n} = \rho_n(iI)$ και $J_{2n}^2 = -1 \cdot I$. Επομένως, και για αυτή την περίπτωση, θα ισχύει το παρακάτω διάγραμμα:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_{i \cdot I}"'] & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "R_{J_{2n}}"] \\
\mathbb{C}^n \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2n}
\end{tikzcd}$$

Εάν το $n = 1$ ο πίνακας J_2 θα παριστά στροφή στο επίπεδο κατά γωνία $\frac{3\pi}{2}$. Για $n \geq 2$ τότε ο πίνακας θα περιέχει στην κύρια διαγώνιο του πίνακες οι οποίοι θα παριστάνουν στροφές, και στις άλλες θέσεις μηδέν.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Η απεικόνιση R_B θα είναι $\mathbb{C}-$ γραμμική αν και μόνο αν:*

$$B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B.$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα θα χρειαστούμε την βοήθεια των παρακάτω αντιμεταθετικών διαγραμμάτων:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_{iI}"'] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{J_{2n}}"] \\
\mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}} \arrow[d, "R_B"] \\
\mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] \arrow[d, "R_{iI}"'] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{J_{2n}}"] \\
\mathbb{C}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "f_n"] & \mathbb{R}^{2\mathrm{n}}
\end{tikzcd}$$

Αρχικά θα αποδείξουμε το ευθύ. Παίρνοντας τη σύνθεση των τριών απεικονίσεων απο αριστερά έχω $R_{iAi} = R_{-A}$ και η σύνθεση των τριών απεικονίσεων απο τα δεξιά μας δίνει $R_{\rho(-A)} = R_{-B}$. Επομένως

$$R_{-B} = R_{J_{2n}BJ_{2n}}.$$

Άρα $-B = J_{2n}BJ_{2n}$. Γνωρίζοντας όμως οτι ισχύει $J_{2n}^2 = -I$, καταλήγουμε στο $B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B$. Ερχόμαστε να αποδείξουμε το αντίστροφο. Απο υπόθεση έχω οτι $B \cdot J_{2n} = J_{2n} \cdot B$. Απο προηγούμενη πρόταση γνωρίζουμε οτι ένας $B \in M_{2n}(\mathbb{R})$ θα είναι $\mathbb{C}-$ γραμμικός αν και μόνο αν η $F = f_n^{-1} \circ R_B \circ f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ είναι $\mathbb{C}-$γραμμική. Στην προκειμένη περίπτωση θα αποδείξουμε πως η $f_n^{-1} \circ R_{J_{2n}BJ_{2n}} \circ f_n$ είναι $\mathbb{C}-$ γραμμική. Πράγματι,

$$f_n^{-1} \circ R_{J_{2n}BJ_{2n}} \circ f_n = f_n^{-1} \circ R_{-B} \circ f_n =$$

$$= f_n^{-1} \circ R_{\rho(-A)} \circ f_n = f_n \circ R_{-A} \circ f_n^{-1} =$$

$$= f_n \circ R_{iAi} \circ f_n^{-1} \text{ που είναι } \mathbb{C} - \text{γραμμική.}$$

□

Πολλές φορές θα μας φανεί χρήσιμο να ορίσουμε την εικόνα του $M_n(\mathbb{C})$. Απο τα αποτελέσματα της παραπάνω πρότασης θα έχουμε:

$$\rho_n(M_n(\mathbb{C})) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}) : AJ_{2n} = J_{2n}A\}.$$

Κλείνοντας αυτή τη παράγραφο θα παρουσιάσουμε μια γεωμετρική εφαρμογή όλων αυτών που προαναφέραμε σχετικά με τη μοναδιαία σφαίρα. Άν $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, αυτοί θα αντιστοιχούν σε δύο πίνακες $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{R})$. Το εσωτερικό γινόμενο $\langle z_1, z_2 \rangle$ αντιστοιχεί στο εσωτερικό γινόμενο $\langle A_1, A_2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1 A_2^T)$ στο σύνολο

$M_2(\mathbb{R})$. Το μήκος $|z|^2 = \langle z, z\rangle$ αντιστοιχεί στο $|A|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T) = \det(A)$, δηλαδή την ορίζουσα του πίνακα A. Ως συνέπεια των παραπάνω, η μοναδιαία σφαίρα μπορεί να εκφραστεί ως:

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \left\{ A = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : \det(A) = 1 \right\} =$$

$$= \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : AA^T = I_2, \det(A) = 1 \right\}.$$

2.2 Πίνακες κβατερνίων ως μιγαδικοί πίνακες

Η ιδέα για την οποία θα μιλήσουμε σε αυτή τη παράγραφο είναι ανάλογη αυτής της προηγούμενης παραγράφου. Στη θέση της $f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$, θα έχουμε την $g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{C}^{2n}$ η οποία θα είναι της μορφής:

$$g_n(z_1 + w_1 j, z_2 + w_2 j, ..., z_n + w_n j) = (z_1, w_1, z_2, w_2, ..., z_n, w_n).$$

Στόχος όπως και πριν είναι να ορίσουμε μια απεικόνιση

$$\psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$$

ώστε το ακόλουθο διάγραμμα να είναι αντιμεταθετικό για κάθε $A \in M_n(\mathbb{H})$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{C}^{2n} \arrow[d, "R_{\psi_n(A)}"] \\ \mathbb{H}^n \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2n} \end{tikzcd}$$

Για $n = 1$ έχουμε:

$$\psi_1(z + wj) = \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix},$$

ή πιο αναλυτικά

$$\psi_1(a + bi + cj + dk) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}.$$

Πρόταση 2.2.1. *Για κάθε $k \in \mathbb{R}$ και $A, B \in M_n(\mathbb{H})$ ισχύει:*

(1) $\psi_n(kA) = k \cdot \psi_n(A)$.

(2) $\psi_n(A + B) = \psi_n(A) + \psi_n(B)$.

(3) $\psi_n(AB) = \psi_n(A) \cdot \psi_n(B)$.

Επίσης, έστω $B \in M_{2n}(\mathbb{C})$. Τότε η απεικόνιση R_B θα είναι $\mathbb{H}$ − γραμμική αν και μόνο αν η $G = g_n^{-1} \circ R_B \circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ είναι $\mathbb{H}$ − γραμμική.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2\mathrm{n}} \arrow[d, "R_B"] \\
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} & \mathbb{C}^{2\mathrm{n}} \arrow[l, "g_n^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Φτάσαμε στο σημείο να συνθέσουμε τις $\rho_n : M_n(\mathbb{C}) \to M_{2n}(\mathbb{R})$ και $\psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to M_{2n}(\mathbb{C})$ έτσι ώστε τα ακόλουθα διαγράμματα να είναι αντιμεταθετικά:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "g_n"] \arrow[d, "R_A"'] & \mathbb{C}^{2\mathrm{n}} \arrow[r, "f_{2n}"] \arrow[d, "R_{\psi_n(A)}"] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{(\rho_{2n} \circ \psi_n)(A)}"] \\
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "g_n"] & \mathbb{C}^{2\mathrm{n}} \arrow[r, "f_{2n}"] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}}
\end{tikzcd}$$

Απο το διάγραμμα παρατηρούμε οτι:

$$(\rho_{2n} \circ \psi_n)(A) : M_n(\mathbb{H}) \to M_{4n}(\mathbb{R})$$

Τέλος, όπως και στη προηγούμενη παράγραφο έτσι και εδώ θα έχουμε έναν I_{4n} που θα κάνει το διάγραμμα αντιμεταθετικό:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "(f_{2n} \circ g_n)"] \arrow[d, "R_{iI}"'] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{I_{4n}}"] \\
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "(f_{2n} \circ g_n)"] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}}
\end{tikzcd}$$

Για $n = 1$ η $(\rho_{2n} \circ \psi_n)(iI) = I_4$ όπου I_4 θα είναι ίσος με:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Επιπλέον:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "(f_{2n} \circ g_n)"] \arrow[d, "R_{jI}"'] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}} \arrow[d, "R_{J_{4n}}"] \\
\mathbb{H}^{\mathrm{n}} \arrow[r, "(f_{2n} \circ g_n)"] & \mathbb{R}^{4\mathrm{n}}
\end{tikzcd}$$

Για $n = 1$ η $(\rho_{2n} \circ \psi_n)(jI) = J_4$ όπου J_4 θα είναι ίσος με:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Αυτοί οι δύο πίνακες διαφέρουν στίς διαγώνιες τους, αφού περιέχουν πίνακες οι οποίοι στη πρώτη περίπτωση παριστάνουν στροφές κατα γωνία $\frac{3\pi}{2}$, ενώ στη δεύτερη ορίζουν συμμετρία ως προς τον άξονα $y = 0$.

Κλείνοντας και αυτή τη παράγραφο, θα δώσουμε μια γεωμετρική εφαρμογή όσων είπαμε σχετικά με την S^3. Εάν τα $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$ αντιστοιχούν στους $A_1, A_2 \in M_2(\mathbb{C})$, τότε το Ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο $\langle q_1, q_2 \rangle$ του $\mathbb{R}^4$ αντιστοιχεί στο εσωτερικό γινόμενο του $\langle A_1, A_2 \rangle = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_1 A_2^T)$. Το μήκος $|q|^2 = q\bar{q}$ αντιστοιχεί στο $|A|^2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(AA^T) = \det(A)$ δηλαδή την ορίζουσα του πίνακα A. Συνεπώς η S^3 μπορεί να εκφραστεί ως:

$$S^3 = \{q \in \mathbb{H} : |q| = 1\} = \{q = (x, y, z, t) \in \mathbb{H} : |q| = 1\} =$$
$$= \left\{ A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ -\bar{u_2} & \bar{u_1} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}) : \det(A) = 1 \right\} =$$
$$= \left\{ A \in M_2(\mathbb{C}) : A\bar{A}^T = I_2, \det(A) = 1 \right\}.$$

2.3 Γενικές γραμμικές ομάδες

Πρόταση 2.3.1. *Η εικόνα ενός αντιστρέψιμου πίνακα μέσω της ρ_n και της ψ_n είναι αντιστρέψιμος πίνακας.*

Απόδειξη. Έστω $A \in M_n(\mathbb{C})$. Τότε,

$$\begin{aligned} A \in GL_n(\mathbb{C}) &\iff R_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \text{ είναι 1-1} \\ &\iff R_{\rho_n(A)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n} \text{ είναι 1-1} \\ &\iff \rho_n(A) \in GL_{2n}(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

□

Ομοίως δουλεύουμε και για την ψ_n. Όπως είπαμε και προηγουμένως μπορούμε να περιορίσουμε τις ρ_n και ψ_n σε απεικονίσεις μεταξύ γενικών γραμμικών ομάδων.

$$\rho_n : GL_n(\mathbb{C}) \to GL_{2n}(\mathbb{R}),$$

$$\psi_n : GL_n(\mathbb{H}) \to GL_{2n}(\mathbb{C}).$$

Στο πρώτο κεφάλαιο ορίσαμε την ορίζουσα ενός πίνακα A ως συνάρτηση απο το $M_n(\mathbb{K})$ στο $\mathbb{K}$, όπου το $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ψ_n για να ορίσουμε την ορίζουσα ενός κβατέρνιου πίνακα

$$\det \circ \psi_n : M_n(\mathbb{H}) \to \mathbb{C}.$$

Για κάθε $A \in M_n(\mathbb{H})$ θα γράφουμε $\det(A)$, εννοώντας $\det(\psi_n(A))$. Επιπλέον $\det(I) = 1$ και $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.

Πρόταση 2.3.2. $GL_n(\mathbb{H}) = \{A \in M_n(\mathbb{H}) : \det(A) \neq 0\}$

Απόδειξη. Έστω $A \in M_n(\mathbb{H})$ τότε $A \in GL_n(\mathbb{H})$ εάν και μόνο εάν $\psi_n(A) \in GL_{2n}(\mathbb{C})$, το οποίο ισοδυναμεί με $\det(\psi_n(A)) \neq 0$. □

Η ορίζουσα ενός κβατέρνιου πίνακα ορίστηκε να είναι μιγαδικός αριθμός, παρόλα αυτά είναι πραγματικός αριθμός.

Πρόταση 2.3.3. *Για κάθε* $A \in M_n(\mathbb{H})$, $\det(A) \in \mathbb{R}$.

Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι πολύ τεχνική και χρησιμοποιεί έννοιες που είναι άγνωστες σχετικά με τα όσα έχουμε πεί.

Κεφάλαιο 3

Ορθογώνιες Ομάδες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τις πιο σημαντικές υποομάδες των γενικών γραμμικών ομάδων. Αυτές είναι οι $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ και $Sp(n)$.

3.1 Εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{K}^n$

Ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

(1) Εάν $q \in \mathbb{R}$, τότε $\bar{q} = q$ και $|q|$ είναι η απόλυτη τιμή του q.

(2) Εάν $q = a + bi \in \mathbb{C}$, τότε $\bar{q} = a - bi$ και $|q| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(3) Εάν $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, τότε $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ και $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Επιπλέον, για κάθε $q, q_1, q_2 \in \mathbb{K}$, ισχύει:

$$\overline{q_1 \cdot q_2} = \bar{q_2} \cdot \bar{q_1}.$$

$$q \cdot \bar{q} = \bar{q} \cdot q = |q|^2.$$

$$|q_1 \cdot q_2| = |q_1| \cdot |q_2|.$$

Ορισμός 3.1.1. *Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{K}^n$ ορίζεται ως μια απεικόνιση απο τον $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ στον $\mathbb{K}^n$, ως εξής:*

$$\langle (x_1, x_2, ..., x_n), (y_1, y_2, ..., y_n) \rangle_{\mathbb{K}} = x_1 \cdot \bar{y_1} + ... + x_n \cdot \bar{y_n}.$$

Ορισμός 3.1.2. *Η συνηθισμένη νόρμα ή το μέτρο ενός διανύσματος στον $\mathbb{K}^n$ ορίζεται ως μια απεικόνιση απο τον $\mathbb{K}^n$ στους μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς, ως εξής:*

$$|X|_{\mathbb{K}} = \sqrt{\langle X, X \rangle_{\mathbb{K}}}.$$

Πρόταση 3.1.1. *Για κάθε* $X, Y, Z \in \mathbb{K}^n$ *και για κάθε* $k \in \mathbb{K}$ *ισχύουν,*

(1) $\langle X, Y + Z\rangle = \langle X, Y\rangle + \langle X, Z\rangle$,

(2) $\langle X + Y, Z\rangle = \langle X, Z\rangle + \langle Y, Z\rangle$,

(3) $\langle kX, Y\rangle = k\langle X, Y\rangle$ *και* $\langle X, kY\rangle = \langle X, Y\rangle \bar{k}$,

(4) $\overline{\langle X, Y\rangle} = \langle Y, X\rangle$.

Ορισμός 3.1.3. *Έστω* $X, Y \in \mathbb{K}^n$.

(1) *Τα* X, Y *καλούνται ορθογώνια εάν* $\langle X, Y\rangle = 0$.

(2) *Αν* $\{X_1, ..., X_n\}$ *είναι μια βάση του* $\mathbb{K}^n$, *τότε αυτή θα καλείται ορθοκανονική εάν* $\langle X_i, X_j\rangle$ *ισούται με* 1 *όταν* $i = j$ *και με* 0 *όταν* $i \neq j$.

(3) *Η συνηθισμένη ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{K}^n$ *είναι το σύνολο:*

$$\{e_1 = (1, 0, .., 0), e_2 = (0, 1, 0, .., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 1)\}.$$

Αφού δόθηκαν οι απαιτούμενοι ορισμοί, θα συνεχίσουμε διακρίνοντας περιπτώσεις για το εσωτερικό γινόμενο στο $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Εάν $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο περιγράφει τη γωνία που σχηματίζουν τα $X, Y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{R}} = |X|_{\mathbb{R}}\, |Y|_{\mathbb{R}} \cos\vartheta.$$

Εάν $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο καλείται και ερμητιανό γινόμενο. Το ερμητιανό γινόμενο δύο $X, Y \in \mathbb{C}^n$ είναι μιγαδικός αριθμός, έτσι θέλουμε να περιγράψουμε το φανταστικό και το πραγματικό μέρος. Αυτό θα γίνει με τη βοήθεια της γνωστής απεικόνισης

$$f = f_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}.$$

Για κάθε $X, Y \in \mathbb{C}^n$ έχουμε:

$$\langle X, Y\rangle_{\mathbb{C}} = \langle f(X), f(Y)\rangle_{\mathbb{R}} + i\,\langle f(X), f(iY)\rangle_{\mathbb{R}},$$

$$|X|_{\mathbb{C}} = |f(X)|_{\mathbb{R}}.$$

Επιπλέον αν τα $X, Y \in \mathbb{C}^n$ είναι ορθογώνια τότε ισχύει:

$$\langle f(X), f(Y)\rangle_{\mathbb{R}} = 0 \text{ και } \langle f(X), f(iY)\rangle_{\mathbb{R}} = 0$$

Από τον ορισμό της ορθοκανονικής βάσης και απο τον τύπο του ερμητιανού γινομένου ισχύει.

Πρόταση 3.1.2. *Το σύνολο* $\{X_1, ..., X_n\} \in \mathbb{C}^n$ *είναι ορθοκανονική βάση αν και μόνο αν* $\{f(X_1), f(iX_1)..., f(X_n), f(iX_n)\}$ *είναι ορθοκανονική βάση στον* $\mathbb{R}^{2n}$.

Κλείνοντας τώρα με τις περιπτώσεις, μας απομένει να πάρουμε για $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο σε αυτή τη περίπτωση καλείται και συμπλεκτικό εσωτερικό γινόμενο. Όμοια με τα προηγούμενα, έτσι και εδώ θα χρησιμοποιήσουμε την $h = f_{2n} \circ g_n : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}^{4n}$. Άρα για κάθε $X, Y \in \mathbb{H}^n$ έχουμε:

$$\langle X, Y \rangle_{\mathbb{H}} = \langle h(X), h(Y) \rangle_{\mathbb{R}} + i \langle h(X), h(iY) \rangle_{\mathbb{R}} + j \langle h(X), h(jY) \rangle_{\mathbb{R}} + k \langle h(X), h(iY) \rangle_{\mathbb{R}}$$

$$|X|_{\mathbb{H}} = |h(X)|_{\mathbb{R}} .$$

Πρόταση 3.1.3. $\{X_1, ..., X_n\} \in \mathbb{H}^n$ *είναι ορθοκανονική βάση εάν και μόνο εάν* $\{h(X_1), h(iX_1), h(jX_1), h(kX_1), ..., h(X_n), h(iX_n), h(jX_n), h(kX_n)\}$ *είναι ορθοκανονική βάση στον* $\mathbb{R}^{4n}$.

Γνώριζοντας οτι ισχύει $\langle X, Y \rangle_{\mathbb{R}} = |X|_{\mathbb{R}} |Y|_{\mathbb{R}} \cos\vartheta$ για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, προκύπτει και η ανισότητα Schwarz.

Πρόταση 3.1.4. *Για καθε* $X, Y \in \mathbb{K}^n$ *ισχύει:*

$$|\langle X, Y \rangle| \leq |X| \cdot |Y| .$$

3.2 Χαρακτηριστικά των ορθογώνιων ομάδων

Η ορθογώνια ομάδα επί ενός σώματος $\mathbb{K}$ ορίζεται ως εξής:

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \langle XA, YA \rangle = \langle X, Y \rangle \text{ για κάθε } X, Y \in \mathbb{K}^n\}$$

Θα τη συμβολίζουμε με $O(n)$ και θα καλείται ορθογώνια ομάδα, στη περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Με $U(n)$ συμβολίζεται η μοναδιαία ομάδα, στη περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ και τέλος με $Sp(n)$ θα συμβολίζεται η συμπλεκτική ομάδα όταν έχουμε $\mathbb{K} = \mathbb{H}$. Πολύ συχνά θα συναντάμε τον πίνακα A^*, ο οποίος θα ισούται με τον συζυγή ανάστροφο πίνακα ενός $A \in M_n(\mathbb{K})$.

Πρόταση 3.2.1. *Αν* $A \in GL_n(\mathbb{K})$ *τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(1) $A \in O_n(\mathbb{K})$.

(2) R_A *διατηρεί την ορθοκανονική βάση του* $\mathbb{K}^n$.

(3) Οι γραμμές του A αποτελούν μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{K}^n$.

(4) $A \cdot A^* = I$.

Η απόδειξη είναι τεχνική και για αυτό το λόγο παραλείπεται. Θα αποδείξουμε αργότερα οτι η γεωμετρική ερμηνεία της $O(n)$ είναι ότι αποτελείται απο πίνακες για τους οποίους ο γραμμικός τους μετασχηματισμός διατηρεί τα εσωτερικά γινόμενα και τα μέτρα των διανυσμάτων.

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $\rho_n : U(n) \leq GL_n(\mathbb{C}) \to O(2n)$ και $\psi_n : Sp(n) \leq GL_n(\mathbb{H}) \to U(2n)$ τότε:*

(1) $\rho_n(U(n)) = O(2n) \cap \rho_n(GL_n(\mathbb{C}))$.

(2) $\psi_n(Sp(n)) = U(2n) \cap \psi_n(GL_n(\mathbb{H}))$.

(3) $(\rho_{2n} \circ \psi_n)(U(n)) = O(4n) \cap (\rho_{2n} \circ \psi_n)(GL_n(\mathbb{H}))$.

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη περίπτωση, καθώς οι υπόλοιπες αποδεικνύονται όμοια. Εάν $A \in GL_n(\mathbb{C})$, τότε επειδή $\rho_n(A^*) = \rho_n(A)^*$ έχουμε $\rho_n(A) \cdot \rho_n(A)^* = \rho_n(A) \cdot \rho_n(A^*) = \rho_n(A \cdot A^*)$. Άρα $A \in U(n)$ αν και μόνο αν $\rho_n(A) \in O(2n)$. □

Πρόταση 3.2.3. *Ισχύει το εξής:*

$$O_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : |R_A(X)| = |X| \ \text{για κάθε}\ X \in \mathbb{K}^n\}.$$

Απόδειξη. Αρχικά θα αποδείξουμε, τη πρόταση για $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Αρκεί να δείξουμε ότι το εσωτερικό γινόμενο καθορίζεται απο το μέτρο δύο διανυσμάτων που ανήκουν στο σώμα μας.

$$|X+Y|^2 = \langle X+Y, X+Y \rangle = \langle X, X \rangle = \langle Y, Y \rangle + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle$$

Συνεπώς για $\langle X, Y \rangle$ έχω:

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2}\left(|X+Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2\right).$$

Μένει να αποδειχθεί για $\mathbb{K} \in \{\mathbb{C}, \mathbb{H}\}$. Υποθέτουμε οτι $A \in GL_n(\mathbb{C})$, άρα υπάρχει $R_A : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ η οποία να διατηρεί τα μέτρα των διανυσμάτων. Τότε η $R_{\rho_n(A)} : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ διατηρεί επίσης τα μέτρα. Χρησιμοποιώντας τα όσα είπαμε στο προηγούμενο κεφαλαίου έχουμε:

$$\left|R_{\rho_n(A)}(f_n(X))\right|_{\mathbb{R}} = |f_n(R_A(X))|_{\mathbb{R}} = |R_A(X)|_{\mathbb{C}} = |X|_{\mathbb{C}} = |f_n(X)|_{\mathbb{C}}.$$

Επομένως, $\rho_n(A) \in O(2n)$, και με τη βοήθεια της προηγούμενης πρόταση-ς προκύπτει ότι $A \in U(n)$. Στη περίπτωση όπου $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ η απόδειξη είναι παρόμοια. □

3.3 Η Ειδική ορθογώνια ομάδα

Πρόταση 3.3.1. *Εάν* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *και* $A \in O_n(\mathbb{K})$*, τότε*

$$|\det(A)| = 1.$$

Απόδειξη. Γνωρίζοντας ότι $I = AA^*$, τότε

$$1 = \det(A \cdot A^*) = \det(A) \cdot \det(A^*) = \det(\mathrm{A}) \cdot \overline{\det(A)} = |\det(A)|^2 .$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\det(A^*) = \overline{\det(A)}$, για $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Στην περίπτωση όπου $\mathbb{K} = \mathbb{H}$, τίποτα δεν αλλάζει αφού όπως αποδείξαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο $\det(A)$ σημαίνει $\det(\psi_n(A))$, και $\psi_n(A^*) = \psi_n(A)^*$. $\square$

Απο τη παραπάνω πρόταση προκύπτει ότι:

- Αν $A \in O(n)$, τότε $\det(A) = \pm 1$.
- Αν $A \in U(n)$, τότε $\det(A) = e^{i\vartheta}$ για κάποιο $\vartheta \in [0, 2\pi)$.
- Αν $A \in Sp(n)$, τότε $\det(A) = \pm 1$.

Η υποομάδα

$$SO(n) = \{A \in O(n) : \det(A) = 1\}$$

καλείται ειδική ορθογώνια ομάδα. Επιπλέον η υποομάδα

$$SU(n) = \{A \in U(n) : \det(A) = 1\}$$

καλείται ειδική μοναδιαία ομάδα. Και οι δύο είναι υποομάδες της γενικής γραμμικής ομάδας, καθώς και της ειδικής γραμμικής ομάδας:

$$SL_n(\mathbb{K}) = \{A \in GL_n(\mathbb{K}) : \det(A) = 1\} .$$

Ένα παράδειγμα ενός στοιχείου της $O(2) \setminus SO(2)$ είναι ο $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Αυτός στέλνει το στοιχείο $e_1 = (1, 0)$ στον ευατό του και το $e_2 = (0, 1)$ στο $-e_2$. Γεωμετρικά αυτό σημαίνει πως ο πίνακας A παριστά συμμετρία ως προς τον άξονα των x, και η ορίζουσα του είναι ίση με -1. Παρατηρώντας τώρα τις $O(n), U(n)$ καθώς και τις υποομάδες τους, θα αναρωτιόμασταν για την σχέση που τις συνδέει. Θα δούμε λοιπόν αργότερα τη σχέση της $SO(n)$ με την $O(n)$ καθώς και της $SU(n)$ με την $U(n)$.

3.4 Ορθογώνιες ομάδες μικρής διάστασης

Σε αυτή τη παράγραφο θα περιγράψουμε την $O_n(\mathbb{K})$ για μικρές τιμές του n. Αν έχω έναν $A \in O(2)$, τότε οι γραμμές του αποτελούν μια ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^2$. Η πρώτη γραμμη είναι ένα διάνυσμα το οποίο μπορεί να γραφεί σαν $(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ για κάποια γωνία ϑ. Η δεύτερη γραμμή είναι ένα διάνυσμα ορθογώνιο στο πρώτο το οποίο μπορεί να γραφεί με δύο τρόπους: $(-\sin\vartheta, \cos\vartheta)$ ή $(\sin\vartheta, -\cos\vartheta)$. Για τη πρώτη επιλογή θα έχω $\det(A) = 1$ και για τη δεύτερη $\det(A) = -1$. Έτσι θα έχουμε:

$$O(2) = SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} : \vartheta \in [0, 2\pi) \right\}$$

Στο προηγούμενο κεφάλαιο είχαμε περιγράψει την S^1 η οποία όπως παρατηρούμε τώρα είναι ισόμορφη με την $SO(2)$, συνεπώς η $SO(2)$ περιγράφει τα σημεία ενός κύκλου που ισαπέχουν απο ένα σταθερό σημείο. Στη συνέχεια η $U(1)$ είναι ισόμορφη με την $SO(2) \cong S^1$. Τέλος η S^3 είναι ισόμορφη με την $Sp(1)$ και απο το γεγονός οτι η $SU(2) = \{A \in U(2) : \det(A) = 1\} \cong S^3$ συμπαιρένουμε ότι $SU(2) \cong Sp(1)$. Μία ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι μόνο οι S^0, S^1, S^3 έχουν δομή ομάδας! Παρά την παρατήρηση μας πως $SU(2) \cong Sp(1)$ θα χρειαστεί και αυστηρή μαθηματική απόδειξη, έτσι λοιπόν έχουμε:

Πρόταση 3.4.1. *Η $SU(2)$ είναι ισόμορφη με την $Sp(1)$.*

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε αυτό τον ισομορφισμό αρκεί να δείξουμε τα εξής:

- Αν $A \in Sp(1)$ τότε $\psi_1(A) \in SU(2)$.
- Κάθε $B \in SU(2)$ να ισούται με $\psi_1(A)$, όπου $A \in Sp(1)$.

Εάν $A = a + ib + jc + kd$ τότε:

$$\psi_1(A) = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

επομένως

$$\psi_1(A) \cdot \psi_1(A^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επιπλέον επαληθεύοντας ότι $\det(\psi_1(A)) = 1$ θα έχουμε $\psi_1(A) \in SU(2)$.

Έστω τώρα $B = \begin{pmatrix} z_1 & w_1 \\ w_2 & z_2 \end{pmatrix} \in SU(2)$. Χρησιμοποιώντας τη συνθήκη ότι $\det(B) = 1$ και το γεγονός ότι $B \cdot B^* = I$ ή ότι οι γραμμές του B αποτελούν ορθοκανονική βάση, έχουμε ότι

$$z_2 = \bar{z_1}, w_2 = -\bar{w_1}.$$

Έτσι άν $z = a + ib$ και $w = c + id$ παίρνουμε $A = a + ib + jc + kd$ και $\psi_1(A) = B$. $\square$

3.5 Ορθογώνιοι πίνακες και ισομετρίες

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ και $Y = (y_1, ..., y_2)$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(X, Y) = |X - Y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ...(x_n - y_n)^2}.$$

Μία συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ καλείται ισομετρία αν για κάθε $X, Y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\mathrm{dist}(f(X), f(Y)) = \mathrm{dist}(X, Y).$$

Πρόταση 3.5.1. *Έστω $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε:*

(1) Αν $A \in O(n)$ τότε η $R_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ισομετρία.

(2) Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια ισομετρία με $f(0) = 0$, τότε $f = R_A$ για κάποιο $A \in O(n)$. Ειδικότερα η f είναι γραμμική.

Η $O(n)$ είναι η ομάδα των ισομετριών στον $\mathbb{R}^n$ η οποία κρατάει σταθερή την αρχή των αξόνων και στέλνει την σφαίρα $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ στον ευατό της. Για παράδειγμα τα στοιχεία της $O(3)$ αντιπροσωπεύουν συναρτήσεις απο την $S^2 \subset \mathbb{R}^n$ στον ευατό της.

Για να καταλάβουμε τώρα τη διαφορά μεταξύ της $O(3)$ και της $SO(3)$, θα χρειαστεί να μιλήσουμε για την έννοια του προσανατολισμού στον $\mathbb{R}^3$. Μια διατεταγμένη ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^3$ όπως για παράδειγμα η $\{X_1, X_2, X_3\}$, θα καλείται δεξιόστροφη αν $X_1 \times X_2 = X_3$. Διαισθητικά αυτό σημαίνει ότι θα πρέπει να ισχύει ο κανόνας του δεξιού χεριού που μας είναι γνωστός απο το Λύκειο. Μια ισομετρία του $\mathbb{R}^3$ λέμε ότι διατηρεί τον προσανατολισμό εάν $\det(A) = 1$ και ότι αντιστρέφει τον προσανατολισμό εάν $\det(A) = -1$, όπου $A \in O(n)$. Είναι γνωστό ότι οι μεταφορές, οι στροφές και οι κατοπτρικές συμμετρίες είναι ισομετρίες, επομένως ισχύει:

- Όλες οι μεταφορές διατηρούν τον προσανατολισμό. Αυτό είναι γεωμετρικά προφανές, αφού ο ορθογώνιος πίνακας που αντιστοιχεί στη μεταφορά είναι ο ταυτοτικός.

- Έστω ένας πίνακας $A \in SO(3)$ ο οποίος περιστρέφει τον $\mathbb{R}^3$ κατά γωνία ϑ γύρω απο τον άξονα z. Έχουμε $\det(A) = 1$ επομένως ο γραμμικός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί στο πίνακα A διατηρεί τον προσανατολισμό.

- Έστω ότι το επίπεδο yz είναι ένας καθρέφτης. Εάν κοιτάξουμε προς αυτό το επίπεδο το σημείο $a = (a_1, a_2, a_3)$ φαίνεται να βρίσκεται στη θέση του $R_A(a) = (-a_1, a_2, a_3)$. Η απεικόνιση R_A καλείται κατοπτρική συμμετρία ως προς το επίπεδο yz και ο πίνακας A είναι ίσος με:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Επομένως απο τα παραπάνω μπορούμε να παρατηρήσουμε τη διαφορά μεταξύ $O(3)$ και $SO(3)$.

Πρόταση 3.5.2. *Άν $A \in O(3)$, τότε $A \in SO(3)$ αν και μόνο αν οι γραμμές του A, $\{R_A(e_1), R_A(e_2), R_A(e_3)\}$ αποτελούν δεξιόστροφη ορθοκανονική βάση.*

3.6 Ομάδα ισομμετρίας του ευκλείδειου χώρου

Το σύνολο

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) = \{f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \mid f \ \ \text{είναι ισομετρία}\}$$

είναι ομάδα με πράξη τη σύνθεση συναρτήσεων. Οι υποομάδες των ισομετριών, οι οποίες σταθεροποιούν την αρχή των αξόνων είναι ισόμορφες με την $O(n)$. Κάθε ισομετρία ενός χώρου περιγράφεται μονοσήμαντα ως ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός ακολουθούμενος απο μία μεταφορά. Επομένως, μια αυθαίρετη ισομετρία του $\mathbb{R}^n$ θα γράφεται ως

$$f(X) = R_A(X) + V$$

όπου $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ και $A \in O(n)$. Η απόδειξη είναι απλή και για να γίνει πιο κατανοητή, θα δουλέψουμε στον $\mathbb{R}^3$. Έχοντας λοιπόν τη σχέση $f = T(R_A)$ εάν η T είναι μεταφορά κατά $V = f(0)$ τότε

$$f(X) = T(R_A(X)) = R_A(X) + V$$

όπου $V = \{v_1, v_2, v_3\}$ και $A \in O(3)$. Υπάρχει όμως και ένας έξυπνος τρόπος με τον οποίο μπορούμε να αναπαριστούμε ισομετρίες στον $\mathbb{R}^n$, μέσω πινάκων ακόμη και άν δεν ισχύει $f(0) = 0$. Με αυτό τον τρόπο πετυχαίνεται στην πληροφορική η περιστροφή και μεταφορά αντικειμένων στην οθόνη, μέσω πινάκων. Θα περιγράψουμε την περίπτωση για $n = 3$.

Έστω $A \in O(3)$ και $V = \{v_1, v_2, v_3\} \in \mathbb{R}^3$. Θα αναπαραστήσουμε την ισομετρία $f(X) = R_A(X) + V$ μέσω ενός πίνακα:

$$F = \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 & 1 \end{pmatrix} \in GL_4(\mathbb{R}).$$

Η σύνθεση δύο ισομετριών, όπως για παράδειγμα $F_1 = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ V_1 & 1 \end{pmatrix}$ και $F_2 = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ V_2 & 1 \end{pmatrix}$ είναι μία ισομετρία η οποία αναπαριστάται απο το γινόμενο:

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ V_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ V_2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 \cdot A_2 & 0 \\ R_{A_2}(V_1) + V_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Η παραπάνω ιδέα δουλεύει και και για τιμές του $n > 3$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$ είναι ισόμορφη με τη παρακάτω υποομάδα της $GL_{n+1}(\mathbb{R})$:

$$\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n) \cong \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} : A \in O(n) \text{ και } V \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Παρατηρούμε πως η υποομάδα της $\mathrm{Isom}(\mathbb{R}^n)$

$$\mathrm{Trans}(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{pmatrix} I & 0 \\ V & 1 \end{pmatrix} : V \in \mathbb{R}^n \right\}$$

είναι ισόμορφη με την $(\mathbb{R}^n, +)$. Αυτή είναι η ομάδα των ισομετριών η οποία μόνο μεταφέρει και δεν στρέφει διανύσματα. Είναι ενδιαφέρον πως η $(\mathbb{R}^n, +)$ είναι ισόμορφη με μία ομάδα πινάκων!

Παρατηρήσαμε απο όλα αυτά που αναφέραμε τη χρησιμότητα που έχουν οι ομάδες πινάκων σε πολλούς κλάδους των μαθηματικών, φυσικής και ακόμη σε κλάδους της πληροφορικής, όπως παρουσιάστηκε πρηγουμένως.

Κεφάλαιο 4

Τοπολογία των ομάδων πινάκων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μιλήσουμε για την τοπολογία των ομάδων πινάκων. Θα ξεκινήσουμε την μελέτη μας για την $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ θεωρώντας την σαν υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ για κάποιο m. Όπως έχουμε παρατηρήσει απο τα προηγούμενα κεφάλαια αρκετά υποσύνολα του ευκλείδειου χώρου όπως η S^n έχουν κάποια γεωμετρική μορφή. Έτσι και εδώ λοιπόν θα μελετήσουμε την G σαν ένα γεωμετρικό αντικείμενο γνωρίζοντας ότι $G \subset GL_n(\mathbb{K}) \subset M_n(\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}^{n^2}$.

4.1 Ανοικτά σύνολα, κλειστά σύνολα και σημεία συσσώρευσης

Η απόσταση μεταξύ δυο σημείων του $\mathbb{R}^m$, όπως ορίστηκε και στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι η $\operatorname{dist}(X,Y) = |X-Y|$. Μια σημαντική ιδιότητα που είναι γνωστή και σαν τριγωνική ανισότητα είναι η εξής:

Πρόταση 4.1.1. *Για κάθε $X, Y, Z \in \mathbb{R}^m$, ισχύει:*

$$\operatorname{dist}(X,Z) \leq \operatorname{dist}(X,Y) + \operatorname{dist}(Y,Z).$$

Αρχικά θα αναφέρουμε την έννοια της σφαίρας ακτίνας $r > 0$ και κέντρου $p \in \mathbb{R}^m$:

$$B(p,r) = \{q \in \mathbb{R}^m : \operatorname{dist}(p,q) < r\}.$$

Με λίγα λόγια η σφαίρα περιέχει όλα εκείνα τα σημεία που η απόσταση τους απο το σταθερό σημείο είναι μικρότερη απο την ακτίνα r.

Ορισμός 4.1.1. *Ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^m$ καλείται συνοριακό σημείο ενός υποσυνόλου $S \subset \mathbb{R}^m$ εάν για κάθε $r > 0$, η σφαίρα $B(p,r)$ περιέχει τουλάχιστον* *ένα σημείο μέσα στο S και ένα τουλάχιστον σημείο έξω απο αυτό. Η συλλογή απο όλα τα συνοριακά σημεία του S καλείται σύνορο της S.*

Κάποιες φορές, αλλά όχι πάντα τα συνοριακά σημεία του S περιέχονται στον ευατό του. Για παράδειγμα αν θεωρήσουμε το άνω ανοικτό ημιεπίπεδο

$$H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\right\},$$

και το κάτω κλειστό ημιεπίπεδο

$$\overline{H} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\right\}.$$

Ο άξονας $\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\}$, είναι το σύνορο του H και του $\overline{H}$. Έτσι το H δεν περιέχει κανένα απο τα συνοριακά του σημεία, αντίθετα με το $\overline{H}$ που τα περιέχει όλα.

Ορισμός 4.1.2. *Έστω $S \subset \mathbb{R}^m$ τότε:*

(1) Το S καλείται ανοικτό εάν δεν περιέχει τα συνοριακά του σημεία.

(2) Το S καλείται κλειστό εάν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Όπως και στο προηγούμενο πράδειγμα το H ήταν ανοικτό ενώ το $\overline{H}$ ήταν κλειστό. Όμως είχαν το ίδιο σύνορο. Θα μπορούσαμε να πούμε δηλαδή πως ένα σύνολο έχει το ίδιο σύνορο με αυτό που έχει και το συμπλήρωμα του. Όταν το σύνολο δεν περιέχει τα συνοριακά του σημεία τότε το συμπλήρωμα του θα τα περιέχει και αντίστροφα.

Πρόταση 4.1.2. *Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^m$ είναι κλειστό αν και μόνο εάν το S^c είναι ανοικτό.*

Ένας εναλλακτικός ορισμός για το ανοικτό σύνολο είναι ο εξής:

Πρόταση 4.1.3. *Ένα σύνολο $S \subset \mathbb{R}^m$ είναι ανοικτό εάν και μόνο εάν για κάθε $p \in S$, υπάρχει $r > 0$ έτσι ώστε $B(p, r) \subset S$.*

Στην πραγματική ευθεία $\mathbb{R}$ το $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ δεν είναι ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}$. Σ-το ευκλείδειο επίπεδο τα υποσύνολα $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$, όπως και οι καμπύλες, δεν είναι ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^2$. Το ίδιο ισχύει στον ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^3$ όπου ούτε οι επιφάνειες είναι ανοικτά σύνολα. Τέλος για κάθε $p \in \mathbb{R}^m$ και για κάθε $r > 0$, η σφαίρα $B = B(p, r)$ είναι ανοικτό σύνολο διότι για κάθε $q \in B$, η σφαίρα με ακτίνα $r - \operatorname{dist}(p, q)/2$ βρίσκεται μέσα στη B. Η συλλογή απο όλα τα ανοικτά σύνολα του $\mathbb{R}^m$ καλείται τοπολογία του $\mathbb{R}^m$. Με αφορμή αυτό θα δώσουμε τον ορισμό της τοπολογίας ενός συνόλου, που στη προκειμένη περίπτωση το σύνολο αυτό θα είναι το $\mathbb{R}^m$.

Ορισμός 4.1.3. *Σε ένα σύνολο D ορίζεται μία τοπολογία όταν δοθεί μια οικογένεια υποσυνόλων του, τα λεγόμενα ανοικτά σύνολα της τοπολογίας, που ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:*

(1) *Τα σύνολα D και το κενό ανήκουν στην οικογένεια των υποσυνόλων του D.*

(2) *Απο την ένωση οποιουδήποτε πλήθους μελών της οικογένειας προκύπτει μέλος της οικογένειας.*

(3) *Απο την τομή οποιουδήποτε πεπερασμένου πλήθους μελών της οικογένειας προκύπτει μέλος της οικογένειας.*

Ερχόμαστε τώρα να δώσουμε τον ορισμό της σύγκλισης άπειρης ακολουθίας στον $\mathbb{R}^m$.

Ορισμός 4.1.4. *Μια άπειρη ακολουθία $\{p_1, p_2, ...\}$ σημείων του $\mathbb{R}^m$ συγκλίνει στο σημείο $p \in \mathbb{R}^m$ εάν ισχύει μία απο τις ακόλουθες ισοδύναμες συνθήκες.*

(1) $\lim_{n\to\infty}\mathrm{dist}(p, p_n) = 0$.

(2) *Για κάθε ανοικτό σύνολο, που περιέχει το p υπάρχει ακέραιος N τέτοιος ώστε $p_n \in U$ για κάθε $n > N$.*

Ορισμός 4.1.5. *Ένα σημείο $p \in \mathbb{R}^m$ καλείται σημείο συσσώρευσης ενός υποσυνόλου $S \subset \mathbb{R}^m$ εάν υπάρχει μια άπειρη ακολουθία σημείων του S η οποία να συγκλίνει στο p.*

Κάθε σημείο του συνόρου του S είναι σημείο συσσώρευσης του. Επομένως η συλλογή όλων των σημείων συσσώρευσης ισούται με το σύνορο του S. Επομένως, ένα σύνολο S είναι κλειστό αν και μόνο αν περιέχει όλα τα σημεία συσσώρευσης του, ή αλλιώς αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να δείχνουμε αν μια ακολουθία συγκλίνει χωρίς να γνωρίζουμε το όριο της απλά δείχνοντας πως οι όροι πλησιάζουν όλο και πιο κοντά ο ένας στον άλλον.

Ορισμός 4.1.6. *Μια άπειρη ακολουθία σημείων $\{p_1, p_2, ...\}$ στον $\mathbb{R}^m$ καλείται ακολουθία Cauchy εάν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ακέραιος N έτσι ώστε $\mathrm{dist}(p_i, q_j) < \epsilon$ για κάθε $i, j > N$.*

Δεν χρειάζεται κάθε φορά να αποδεικνύουμε αν μία συγκλίνουσα ακολουθία είναι Cauchy. Υπάρχει μια βασική ιδιότητα του ευκλείδειου χώρου που υποδεικνύει το αντίστροφο:

Πρόταση 4.1.4. *Κάθε ακολουθία Cauchy στον $\mathbb{R}^m$ συγκλίνει σε κάποιο σημείο του $\mathbb{R}^m$.*

Θα κλείσουμε αυτή την παράγραφο με κάποιες έννοιες σχετικές για τα ανοικτά και κλειστά σύνολα.

Ορισμός 4.1.7. *Έστω $S \subset G \subset \mathbb{R}^m$.*

(1) Το S θα καλείται ανοικτό στο G εάν για όλα τα $p \in S$, υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε
$$\{q \in G : \mathrm{dist}(p, q) < r\} \subset S$$

(2) Το S θα καλείται κλειστό στο G εάν το $\{p \in G : p \notin S\}$ είναι ανοιχτό στο G.

Για παράδειγμα το διάστημα $(0, 1)$ είναι ανοικτό στο $\mathbb{R}$, διότι το $[0, 1]$ είναι κλειστό στο $\mathbb{R}$. Το διάστημα $[0, 1)$ δεν είναι ούτε ανοικτό, ούτε κλειστό στο $\mathbb{R}$, αλλά είναι ανοικτό στο $[0, 2]$ και κλειστό στο $(-1, 1)$.

Πρόταση 4.1.5. *Έστω $S \subset G \subset \mathbb{R}^m$. Τότε το S θα είναι ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) στο G αν και μόνο αν $S = U \cap G$ για κάποιο U ανοικτό (αντίστοιχα κλειστό) υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.*

Για παράδειγμα, αν $G = S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$, τότε το άνω ανοικτό ημιεπίπεδο $S = \{(x, y, z) \in G : z > 0\}$ θα είναι ανοικτό στο G, διότι η τομή του παρακάτω συνόλου με το G θα μας δώσει το S.
$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z > 0\right\}.$$
Ο προηγούμενως μας χαρακτηρισμός για τα κλειστά σύνολα, τα οποία περιέχουν όλα τα σημεία συσσώρευσης τους γενικεύεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 4.1.6. *Έστω $S \subset G \subset \mathbb{R}^m$. Τότε το S θα είναι κλειστό στο G αν και μόνο αν κάθε $p \in G$ το οποίο είναι σημείο συσσώρευσης του S θα περιέχεται στο S.*

Ένα σύνολο S θα είναι πυκνό στο G εάν κάθε σημείο του G είναι σημείο συσσώρευσης του S. Για παράδειγμα το σύνολο των αρρήτων είναι πυκνό στο $\mathbb{R}$.

Αφού λοιπόν ορίσαμε κάποιες βασικές έννοιες τις τοπολογίας θα συνεχίσουμε στην επόμενη παράγραφο, αναφέροντας την έννοια της συνέχειας συνάρτησης μεταξύ συνόλων.

4.2 Συνέχεια

Έστω ένα $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ και $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$.

Ορισμός 4.2.1. *Μία συνάρτηση $f : G_1 \to G_2$ θα είανι συνεχής αν για κάθε άπειρη ακολουθία σημείων $\{p_1, p_2, ...\}$ του G_1 η οποία συγκλίνει σε ένα σημείο $p \in G_1$, η ακολουθία $\{f(p_1), f(p_2), ...\}$ συγκλίνει στο $f(p)$.*

Πολλές φορές θα μας φανεί χρήσιμο να μην μιλάμε για ευκλείδειους χώρους και να χειριζόμαστε τα G_1 και G_2 σαν ανεξάρτητα αντικείμενα.

Πρόταση 4.2.1. *Για κάθε $f : G_1 \to G_2$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(1) Η f είναι συνεχής.

(2) Για κάθε ανοιχτό U στο G_2 , το $f^{-1}(U)$ είναι ανοιχτό στο G_1.

(3) Για κάθε κλειστό U στο G_2 , το $f^{-1}(U)$ είναι κλειστό στο G_1.

Όπου $f^{-1}(U) = \{p \in G_1 : f(p) \in U\}$. Συγκεκριμενοποιώντας και ψάχνοντας για συνέχεια σε ένα σημείο που ανήκει στο G_1 υπάρχει ο παρακάτω χρήσιμος ορισμός.

Ορισμός 4.2.2. *Μια συνάρτηση $f : G_1 \to G_2$ είναι συνεχής σε ένα σημείο $p \in G_1$ αν και μόνο αν, δοσμένου ενός $\epsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε:*

$$f(B(a, \delta)) \subset B(f(a), \epsilon).$$

Στη συνέχεια θα περιγράψουμε τι ακριβώς θα εννοούμε όταν λέμε πως τα G_1, G_2 είναι τοπολογικά ίδια. Θα πρέπει να υπάρχει μία αντιστοιχία μεταξύ τους που θα συνδέει ανοιχτά σύνολα με ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός 4.2.3. *Μία συνάρτηση $f : G_1 \to G_2$ καλείται ομοιομορφισμός αν η f είναι αμφιμονοσήμαντη, συνεχής και η f^{-1} είναι συνεχής. Τότε τα G_1, G_2 θα λέμε ότι είναι ομοιόμορφα.*

Η έννοια του ομοιομορφισμού αποτελεί σημαντικό κομμάτι της τοπολογίας και επιπλέον μας δίνει την πληροφορία για την ουσιώδη δομή των δύο συνόλων όπου δουλεύουμε.

4.3 Δρομοσυνεκτικότητα

Όπως μας είναι γνωστό ένα σύνολο G καλείται συνεκτικό όταν υπάρχουν δύο μη κενά, ανοιχτά και ξένα μεταξύ τους υποσύνολα τέοια ώστε η ένωση τους να μην μας δίνει το G. Δίπλα σε αυτή τη πολύ βασική τοπολογική ιδιότητα μπορούμε να τοποθετήσουμε την έννοια της δρομοσυνεκτικότητας με την οποία και θα ασχοληθούμε σε αυτή τη παράγραφο.

Ορισμός 4.3.1. *Ένα σύνολο $G \subset \mathbb{R}^m$ είναι δρομοσυνεκτικό εάν για κάθε $p, q \in G$, υπάρχει μια συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to G$ με $f(0) = p$ και $f(1) = q$.*

Για παράδειγμα ο δίσκος $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ είναι δρομοσυνεκτικός, αφού για κάθε $p, q \in A$ υπάρχει συνεχή απεικόνιση και ορίζεται ως:

$$f(t) = p + t(q - p).$$

Η συνεκτικότητα του $[0,1]$ παίζει ένα σημαντικό ρόλο στη σχέση που έχει η συνεκτικότητα με την δρομοσυνεκτικότητα.

Πρόταση 4.3.1. *Άν ένα σύνολο G είναι δρομοσυνεκτικό τότε θα είναι συνεκτικό.*

Απόδειξη. Έστω οτι το σύνολο G δεν είναι συνεκτικό και $\{U, V\}$ μια διαμέριση του. Τα U, V είναι μή κενά, συνεπώς υπάρχουν σημεία $p \in U$ και $q \in V$. Όμως απο υπόθεση έχω οτι το G είναι δρομοσυνεκτικό, άρα υπάρχει συνεχής απεικόνιση $f : [0,1] \to G$ με $f(0) = p$ και $f(1) = q$. Όμως τότε το $\{f^{-1}(U), f^{-1}(V)\}$ θα είναι μια διαμέριση του $[0,1]$. Συνεπώς οδηγούμαστε σε άτοπο, αφού όπως γνωρίζουμε τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του $\mathbb{R}$, εκτός απο το κενό είναι τα διαστήματα του. □

Η δρομοσυνεκτικότητα ενός συνόλου, άρα και η συνεκτικότητα, μπορεί να εκφραστεί και με τον ακόλουθο ισοδύναμο χαρακτηρισμό.

Πρόταση 4.3.2. *Ένα δρομοσυνεκτικό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^m$ δεν έχει ανοιχτά και κλειστά υποσύνολα παρα μόνο το κενό και τον εαυτό του.*

Η αποόδειξη παραλείπεται.

Μία συνηθισμένη πρακτική για να αποδεικνύουμε αν μια ιδιότητα ισχύει για όλα τα στοιχεία ενός δρομοσυνεκτικού συνόλου, είναι να αποδεικνύουμε ότι το σύνολο αυτών των στοιχείων είναι το μη κενό, ανοιχτό και κλειστό. Η δρομοσυνεκτικότητα είναι τοπολογική ιδιότητα δηλαδή αν ένα $G \subset \mathbb{R}^m$ είναι δρομοσυνεκτικό τότε όλα τα ομοιόμορφα του σύνολα θα είναι δρομοσυνεκτικά.

Πρόταση 4.3.3. *Άν τα $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ και $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ είναι ομοιόμορφα, τότε ή και τα δύο θα είναι δρομοσυνεκτικά ή δεν θα είναι κανένα.*

4.4 Συμπάγεια

Εκτός απο την έννοια της συνεκτικότητας μια άλλη τοπολογική ιδιότητα είναι αυτή της συμπάγειας. Θα ξεκινήσουμε, λοιπόν δίνοντας ένα διαισθητικό ορισμό για την έννοια αυτή.

Ορισμός 4.4.1. *Ένα υποσύνολο $G \subset \mathbb{R}^m$ του ευκλείδειου χώρου, θα καλείται φραγμένο εάν $G \subset B(p,r)$ για κάποιο $p \in \mathbb{R}^m$ και για $r > 0$. Επιπλέον το G θα καλείατι συμπαγής αν είναι κλειστό και φραγμένο.*

Πολλές φορές ο παραπάνω ορισμός θα μας διευκολύνει πάρα πολύ για να δείχνουμε αν ένα $G \subset \mathbb{R}^m$ είναι συμπαγής. Παρακάτω παρουσιάζεται ένας εναλλακτικός ορισμός για τη συμπάγεια.

Ορισμός 4.4.2. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^m$.*

(1) Ένα ανοικτό κάλυμμα του G είναι μια συλλογή, $\mathbb{U}$, συνόλων τα οποία είναι ανοικτά στο G και η ένωση τους μας δίνει το G.

(2) Το G θα καλείται συμπαγής αν κάθε ανοικτό κάλυμμα, $\mathbb{U}$, του G έχει ένα πεπερασμένο υποκάλυμμα, εννοώντας ένα $\{U_1, ..., U_n\} \subset \mathbb{U}$ του οποίου η ένωση να μας δίνει το G.

Η ισοδυναμία αυτών των δύο ορισμών της συμπάγειας, καλείται θεώρημα των Heine-Borel. Αφού λοιπόν δώσαμε αυτούς τους δύο ορισμούς θα αναφέρουμε ένα παράδειγμα μη συμπαγούς συνόλου. Το διάστημα $(0,1) \subset \mathbb{R}$ δεν θα είναι συμπαγές. Γενικά το $\mathbb{R}$ δεν είναι συμπαγές και τα υποσύνολα του δεν είναι συμπαγή, διότι το ανοιχτό κάλυμμα του $(0,1)$

$$\mathbb{U} = \left\{(0,\frac{1}{2}),(0,\frac{2}{3}),...\right\}$$

δεν έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Αντίθετα το$[0,1]$ είναι συμπαγές διότι είναι κλειστό και φραγμένο. Πολλές φορές θα μας είναι αρκετά δύσκολο να αποδείξουμε οτι κάθε ανοιχτό κάλυμμα του $[0,1]$ έχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Όπως και στη προηγούμενη παράγραφο έτσι και εδώ η συμπάγεια είναι τοπολογική ιδιότητα.

Πρόταση 4.4.1. *Άν τα $G_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$ και $G_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$ είναι ομοιόμορφα, τότε ή και τα δυο θα είναι συμπαγή, ή δεν θα είναι κανένα.*

Υπάρχει και ένας τρίτος εναλλακτικός τρόπος για να εξετάσουμε αν ένα σύνολο είναι συμπαγές. Η συμπάγια δηλαδή εδώ θα εξαρτάται απο την έννοια της σύγκλισης ακολουθίας.

Πρόταση 4.4.2. *Ένα $G \subset \mathbb{R}^m$ καλείται συμπαγές αν και μόνο αν κάθε άπειρη ακολουθία σημείων του G διαθέτει συγκλίνουσα υπακολουθία που να συγκλίνει στο $p \in G$.*

Για παράδειγμα η υπακολουθία $\left\{(0, \frac{1}{2}), (0, \frac{2}{3}), ...\right\}$ του $G = (0, 1)$ συκλίνει μόνο στο $1 \notin G$. Τέλος η επόμενη πρόταση αναφέρεται στη σχέση μεταξύ συνέχειας μιας απεικόνισης, και συμπάγειας.

Πρόταση 4.4.3. *Έστω $G \subset \mathbb{R}^{m_1}$ και $f : G \to \mathbb{R}^{m_2}$ συνεχής. Άν το G είναι συμπαγές, τότε η εικόνα $f(G)$ είναι συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $\mathbb{U}$ είναι ένα ανοικτό κάλυμμα του $f(G)$. Τότε $f^{-1}(U)$ είναι ανοικτό στο G για κάθε $U \in \mathbb{U}$, έτσι $f^{-1}(U) = \{f^{-1}(U) : U \in \mathbb{U}\}$ είναι ένα ανοιχτό κάλυμμα του G. Απο υπόθεση έχω οτι G είναι συμπαγές, άρα υπάρχει ένα πεπερασμένο υποκάλλυμα $\{f^{-1}(U_1), f^{-1}(U_2), ..., f^{-1}(U_n)\}$ του $f^{-1}(\mathbb{U})$. Απο υπόθεση οτι η f είναι συνεχής και απο τον τελευταίο μας συλλογισμό έχουμε οτι $\{U_1, U_2, ..., U_n\}$ είναι πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\mathbb{U}$. Συνεπώς $f(G)$ συμπαγές. $\square$

4.5 Τοπολογία των ομάδων πινάκων

Μια υποομάδα $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ μπορούμε να την θεωρήσουμε πλέον σαν ένα υποσύνολο του ευκλείδιου χώρου, οπότε μπορούμε να αναρωτηθούμε αν αυτή η G είναι ανοικτή, κλειστή, συμπαγής ή απλά συνεκτική.

Ορισμός 4.5.1. *Μια ομάδα πινάκων είναι μία υποομάδα $G \subset GL_n(\mathbb{K})$ η οποία είναι κλειστή στην $GL_n(\mathbb{K})$.*

Έτσι φτάσαμε στο σημείο να εξετάσουμε την κλειστότητα των υποομάδων της $GL_n(\mathbb{K})$, και να διαπιστώνουμε κάθε φορά αν είναι ομάδες πινάκων.

Πρόταση 4.5.1. *Οι ομάδες $O_n(\mathbb{K}), SL_n(\mathbb{K}), SO(n)$ και $SU(n)$ είναι ομάδες πινάκων.*

Απόδειξη. Θα πρέπει να αποδεξουμε οτι είναι κλειστές υποομάδες της $GL_n(\mathbb{K})$. Για την $O_n(\mathbb{K})$, ορίζουμε την $f : M_n(\mathbb{K}) \to M_n(\mathbb{K})$ με τύπο $f(A) = A \cdot A^*$. Αυτή η συνάρτηση είναι συνεχής και το μονοσύνολο $\{I\} \subset M_n(\mathbb{K})$ είναι κλειστό, έτσι $O_n(\mathbb{K}) = f^{-1}(\{I\})$ είναι κλειστό στο $M_n(\mathbb{K})$, επομένως και στη $GL_n(\mathbb{K})$. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύουμε και οτι η $SL_n(\mathbb{K})$ είναι κλειστή υποομάδα της $GL_n(\mathbb{K})$, ορίζοντας τη συνεχή απεικόνιση $\det : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. Τέλος για την $SO(n), SU(n)$, έχουμε οτι $SO(n) = O(n) \cap SL_n(\mathbb{R})$ και $SU(n) = U(n) \cap SL_n(\mathbb{C})$, και απο το γεγονός οτι η τομή δύο κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο αποδεικνύεται και τη τρίτη περίπτωση. $\square$

Τέλος ένα πολύ βασικό σημείο είναι επίσης η συμπάγεια των ομάδων πινάκων. Έτσι έχουμε

Πρόταση 4.5.2. *Οι ομάδες* $O(n), SO(n), U(n), SU(n)$ *και η* $Sp(n)$ *είναι συμπαγείς.*

Απόδειξη. Αποδεικνύοντας ότι αυτές οι ομάδες είναι κλειστές στην $GL_n(\mathbb{K})$, αποδείξαμε πως είναι κλειστές ευκλείδειο χώρο $M_n(\mathbb{K})$. Αρκεί δηλαδή τώρα να δείξουμε οτι είναι φραγμένες. Αυτό προκύπτει απο το γεγονός ότι οι γραμμές ενός $A \in O_n(\mathbb{K})$ αποτελούν ορθοκανονική βάση δηλαδή ο γραμμικός μετασχηματισμός που αντιστοιχεί σε αυτό το πίνακα διατηρεί τα μέτρα των διανυσμάτων. $\square$

Για ποιό λογο όμως ορίζουμε τις ομάδες πινάκων σαν κλειστά υποσύνολα της $GL_n(\mathbb{K})$. Αν και δεν είναι μελέτη της εργασίας αυτής, αξίζει να πούμε πως οι μη κλειστές υποομάδες δεν θα αποτελούν υποχρεωτικά πολλαπλότητες.

Με το πέρας αυτής του κεφαλαίου, ολοκληρώνεται η εργασία αυτή έχοντας ανοίξει σε μεγάλο βαθμό τον δρόμο για τη μελέτη της θεωρίας των ομάδων Lie και των πολλαπλοτήτων.

Βιβλιογραφία

[1] K. Tapp: *Matrix Groups for Undergraduates*, American Math Society, STML 29, 2005

[2] A. Baker: *Matrix Groups: An Introduction to Lie Group Theory*, Springer, 2002

[3] M. Curtis: *Matrix Groups, Second edition*, Springer, 1984

[4] J. McCleary: *A First Course in Topology: Continuity and Dimension*, American Math Society, STML 31, 2006

[5] Σ. Ν. Πνευματικός: *ΤΟΠΟΛΟΓΙΑ: Θεμελιώδεις Έννοιες της Γενικής Τοπολογίας*, Εκδόσεις Γ. Πνευματικού, Αθήνα, 2002.

[6] B. O'Neill: *Στοιχειώδης Διαφορική Γεωμετρία*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2005.

[7] John B. Fraleigh: *Εισαγωγή στην Αλγεβρα*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2003.